

Ερωτήσεις του τύπου Σωστό - Λάθος

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

1.2. Συναρτήσεις

- (1) Για να ορίσετε μια συνάρτηση, αρκεί να γνωρίζετε μόνο το πεδίο ορισμού της.
- (2) Για να ορίσετε μια συνάρτηση f , αρκεί να δίνονται δύο στοιχεία: το πεδίο ορισμού της και η τιμή της $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.
- (3) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f το πολύ ένα κοινό σημείο.
- (4) Ο κύκλος αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.
- (5) Σύνολο τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$
- (6) Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f .
- (7) Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f .
- (8) Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in D_f$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f .
- (9) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της f .
- (10) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα

συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

- (11) Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες, όταν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.
- (12) Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B . Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ .
- (13) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, αν ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$, τότε έχει υποχρεωτικά πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$.
- (14) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με τη g , και τη συμβολίζουμε $f \circ g$, τη συνάρτηση με τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- (15) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .
- (16) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.
- (17) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.
- (18) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

1.3 Μονότονες συναρτήσεις- Αντίστροφη συνάρτηση

- (19) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- (20) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$,

με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

(21) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

(22) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

(23) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2).$$

(24) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2.$$

(25) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

(26) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A \text{ και } f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A).$$

(27) Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι και γνησίως μονότονη.

(28) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

(29) Αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της f η εξίσωση $f(x) = y$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις ως προς x , τότε η f είναι 1-1.

(30) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

- (31) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
- (32) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.
- (33) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.
- (34) Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- (35) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
- (36) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

1.4 Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- (37) Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 , τότε η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει μπορεί να είναι ίση με το όριο της x_0 ή διαφορετική από αυτό.
- (38) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0.$$

- (39) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$$

- (40) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

1.5 Ιδιότητες των ορίων

- (41) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- (42) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- (43) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- (44) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, τότε σε κάθε περίπτωση υπάρχουν και τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

- (45) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

- (46) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

- (47) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)},$$

εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 , με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

- (48) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|.$$

- (49) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- (50) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

- (51) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

- (52) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$, και είναι πραγματικός αριθμός τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ για κάθε σταθερά } k \in \mathbb{R}.$$

- (53) Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

- (54) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta \mu x| \geq |x|$.

- (55) Για $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$.

- (56) Για $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \nu \chi = \sigma \nu \chi_0$.

(57) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu \chi - 1}{x} = 1.$

(58) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1.$

1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- (59) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η εξής ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

- (60) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

- (61) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

- (62) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε υποχρεωτικά $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

- (63) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

- (64) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

- (65) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.

(66) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$, $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

(67) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

(68) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty$, $v \in \mathbb{N}^*$.

(69) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

(70) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty$, $v \in \mathbb{N}$.

(71) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

(72) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty$, $v \in \mathbb{N}$.

(73) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

(74) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(75) Οι απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι: $(+\infty) + (-\infty)$ και $0 \cdot (\pm\infty)$.

(76) Οι απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι: $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$ και $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

1.7 Όρια συνάρτησης στο άπειρο

(77) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, τότε μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της f στο $+\infty$.

(78) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$, $v \in \mathbb{N}^*$.

(79) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$.

(80) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

(81) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$.

(82) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$,

με $a_v \neq 0$, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_v x^v) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_v x^v).$$

(83) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $a_v \neq 0$.

$\beta_k \neq 0$, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_v x^v}{\beta_k x^k} \right) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_v x^v}{\beta_k x^k} \right).$$

(84) Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

(85) Αν είναι $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

(86) Αν είναι $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

(87) Αν είναι $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$.

(88) Αν είναι $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.

(89) Αν είναι $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

(90) Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

1.8 Συνέχεια συνάρτησης

(91) Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f συνεχής στο x_0 , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(92) Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 .

(93) Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

(94) Αν η συνάρτηση f , είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε κατ' ανάγκη και η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

(95) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f + g, c \cdot f$, όπου $c \in \mathbb{R}$,

$f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[n]{f}$, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

- (96)** Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .
- (97)** Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .
- (98)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.
- (99)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $f(\beta) > 0$.
- (100)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
- (101)** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- (102)** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.
- (103)** Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- (104)** Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.
- (105)** Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο

- $(\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M .
- (106)** Μια συνεχής στο (α, β) συνάρτηση f παίρνει πάντοτε στο (α, β) μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .
- (107)** Αν η f συνεχής συνάρτηση $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .
- (108)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.
- (109)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.
- (110)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα:
- $$f([\alpha, \beta]) = [f(\beta), f(\alpha)].$$
- (111)** Το σύνολο τιμών κάθε συνεχούς συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

2.1 Η έννοια της παραγώγου

- (112)** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .
- (113)** Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- (114)** Αν η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο σημείο x_0 , τότε υποχρεωτικά η f' είναι συνεχής στο x_0 .
- (115)** Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο του πε-

δίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

(116) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(117) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε πάντοτε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

(118) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 , δηλαδή είναι $\lambda = f'(x_0)$.

(119) Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.

(120) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(121) Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 είναι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 , δηλαδή είναι $u(t_0) = S''(t_0)$.

(122) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο 0.

2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις-Παράγωγος συνάρτηση

(123) Ισχύει $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

(124) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \cos x$, με πεδίου ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε $f'(x) = -\sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(125) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = nx^{n-1}$, δηλαδή $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(126) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(127) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού $\Delta = [0, +\infty)$, τότε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(128) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

2.3 Κανόνες παραγωγίσιμης

(129) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x/\sin x = 0\}$ ισχύει:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

(130) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x/\sin x = 0\}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \cos x.$$

(131) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x/\cos x = 0\}$ ισχύει $(\cos x)' = -\sin x$.

(132) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x/\cos x = 0\}$ ισχύει $(\cos x)' = -\sin x$.

(133) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η συνάρτηση $f(x) = x^{-n}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

(134) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

(135) Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

(136) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

(137) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(138) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 , ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(139) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 , ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(140) Αν οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(141) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

(142) Αν οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(143) Αν οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(144) Για κάθε συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο x_0 και f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει πάντοτε:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)).$$

(145) Αν η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο x_0 και f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

2.4 Ρυθμός μεταβολής

(146) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

2.5 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής

(147) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) , τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(148) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) και $f(a) = f(b)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0.$$

(149) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[a, b]$, τότε η γραφική της παράσταση έχει σε ένα τουλάχιστον σημείο οριζόντια εφαπτομένη.

(150) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0.$$

(151) Αν ισχύει το Θεώρημα Rolle για την f στο $[a, b]$, γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .

(152) Αν ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στο $[a, b]$, γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f

στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB , όπου $A(a, f(a)), B(b, f(b))$.

2.6 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

(153) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει πάντοτε $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

(154) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c.$$

(155) Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(156) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

(157) Έστω μια συνάρτηση f , που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

(158) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$.

(159) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

- (160) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .
- (161) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .
- (162) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .

2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

- (163) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- (164) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- (165) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι υποχρεωτικά το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.
- (166) Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .
- (167) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

(168) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[α, β]$ και σημείο $x_0 \in [α, β]$, στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε, πάντοτε ισχύει:

$$f'(x_0) = 0.$$

(169) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

(170) Αν μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , τότε τα εσωτερικά σημεία x_0 του Δ , στα οποία $f'(x_0) \neq 0$, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

(171) Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(172) Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(173) Ένα τοπικό μέγιστο δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

(174) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.

(175) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

(176) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

(177) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ορίζουμε τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f παραγωγίζεται.

- (178) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τα άκρα ενός διαστήματος Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της) είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f στο διάστημα Δ .
- (179) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f στο διάστημα Δ ονομάζουμε τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f δεν μηδενίζεται.
- (180) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται λέγονται κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f στο διάστημα Δ .

2.8 Κυρτότητα-Σημεία καμπής συνάρτησης

- (181) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f κυρτή στο Δ .
- (182) Αν μια συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- (183) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.
- (184) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική της παράσταση.
- (185) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

- (186) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- (187) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .
- (188) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , η οποία δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του Δ , τότε ισχύει πάντοτε $f''(x) \neq 0, x \in \Delta$.
- (189) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη (x_0, β) ή αντιστρόφως και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- (190) Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι: τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται και τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει f'' .

2.9 Ασύμπτωτες - Κανόνες De L' Hospital

- (191) Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
- (192) Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

(193) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

(194) Αν τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

(195) Αν τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ισούται με ℓ , $\ell \in \mathbb{R}$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

(196) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

(197) Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0, \text{ αντιστοίχως } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

(198) Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = +\infty$.

(199) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(200) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε ισχύει πάντοτε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(201) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.1 Αόριστο ολοκλήρωμα

(202) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα συνάρτηση της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

3.2 Ορισμένο ολοκλήρωμα

(203) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε οι εκφράσεις $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$ εκφράζουν διαφορετικό ορισμένο ολοκλήρωμα.

(204) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

(205) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύει πάντοτε $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$

(206) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύει $\int_a^a f(x)dx = 0$.

(207) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύει $\int_a^a f(x)dx = 1$.

(208) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(209) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ για την οποία ισχύει $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.

(210) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

(211) Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

(212) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $a, b, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_a^b f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^b f(x) dx$.

(213) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $a, b, \gamma \in \Delta$, τότε η ιδιότητα:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^b f(x) dx \text{ ισχύει μόνο, όταν } a < \gamma < b.$$

(214) Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και για κάθε $x \in [a, b]$ είναι $f(x) \geq 0$, τότε ισχύει πάντοτε:

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

(215) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_a^b f(x) dx > 0$.

3.3 Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

(216) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Τότε ισχύει $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$, όπου G μια παράγουσα της f στο $[a, b]$.

(217) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$ και η G μια παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε ισχύει πάντοτε $\int_a^b f(t) dt = G(a) - G(b)$.

(218) Ισχύει $\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

(219) Αν οι συναρτήσεις f, g' είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύει πάντοτε:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g'(x) dx.$$

(220) Αν οι συναρτήσεις f' , g' είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύει πάντοτε:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

(221) Αν f , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $d(u) = g'(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(b)$, τότε:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du.$$

3.4 Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

(222) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$, για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = a$, $x = b$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_a^b f(x)dx$.

(223) Αν οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$, με $f(x) \geq g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις ευθείες $x = a$, $x = b$ είναι $E(\Omega) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

(224) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[a, b]$, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.