

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ



1η επαναληπτική εργασία

2^ο ΘΕΜΑ - 4^ο ΘΕΜΑ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ .

(Μονάδες 12)

β) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

2.

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

(Μονάδες 13)

3.

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16. \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

4.

Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda+2)x^2 + (2\lambda+3)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1), \quad \text{με παράμετρο } \lambda \neq -2.$$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 12\lambda + 25 \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$. (Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση :

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

5.

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση (1) να είναι 1^{ου} βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση (1) είναι 2^{ου} βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια ρίζα διπλή, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή, να προσδιορίσετε τις τιμές του λ (αν υπάρχουν) ώστε το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1$ να είναι μη αρνητικό για κάθε x πραγματικό αριθμό.

(Μονάδες 10)

6.

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

7.

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$. (Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να

προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

(Μονάδες 10)

8.

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha + 1)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\alpha + 1)^2 - 16$$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι το τριώνυμο έχει δυο ρίζες, x_1 και x_2 .

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$, το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών του.

Υπολογίστε το α , ώστε (Μονάδες 2)

ii) : $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$ (Μονάδες 8)

9.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$. (Μονάδες 13)

10.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (Μονάδες 5)

11.

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1) \quad \text{με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ . (Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ . (Μονάδες 10)

12.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1) \quad \text{με παράμετρο } \lambda.$$

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί. (Μονάδες 5)