



Κ Ε Φ Α Λ Λ Α Ι Ο 6ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 2

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

ΤΥΠΟΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{3})$, $f(2x)$ και $f(x+1)$.
 - Να αποδείξετε ότι η ισότητα $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ ισχύει μόνο όταν $\alpha\beta = 1$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι : $f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) = 2f(\alpha) + f(1 - \beta) + f(1 + \beta) - 6$.
 - Να αποδείξετε ότι : $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι : $f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) = 2[f(\alpha) + f(\beta)]$.
 - Να αποδείξετε ότι : $2f(\alpha) + 8f(\beta) - f(\alpha + 2\beta) \geq 0$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x^2 + 2x + 8, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$.
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(1)$ και $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
 - Να βρείτε την τιμή $f(f(-1))$.
- Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(1) = 4 \quad \text{και} \quad f(f(1)) = 2$$
 - Να βρεθεί η τιμή $f(4)$.
 - Αν $f(x) \neq 2$, να αποδείξετε ότι $x \neq 4$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x - 1|$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3) - f(-1)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 2$.

γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

δ) Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(4)) \cdot x^2 + f(-6) \cdot x + f(10) \geq 0$.

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με $g(x) = 2x - 4$ για τις οποίες ισχύει :

$$f(g(x)) = 8x - 16 - f(2) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$.

β) Να βρείτε τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

(Απ. β) $f(x) = 4x - 4$

8. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f(1) = -1 \quad \text{και} \quad f(2x + 5) = 4x + \alpha, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό α .

β) Να βρείτε τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{αν } x < 3-\lambda \\ x^5, & \text{αν } x \geq 3\lambda-5 \end{cases}$

η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό λ .

β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(-\sqrt{2})$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(2^8)) = x^{100}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (6 - \lambda)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(\lambda) = 14$.

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό λ .

β) Να λύσετε την ανίσωση $-1 \leq f(x) \leq 7$.

γ) Να δείξετε ότι ισχύει : $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.