

Άλγεβρα
A' Λυκείου

Τελική
Επανάληψη
3α Θέματα

Λύσεις

1) $A = |x-1| + |y-3|$

Π1. Είναι $|x-1| = x-1$, οπότε $1 < x \Leftrightarrow x-1 > 0$ (1)
[από συνθήκη]

και $|y-3| = 3-y$, οπότε $y < 3 \Leftrightarrow y-3 < 0 \Leftrightarrow 3-y > 0$ (2)
[από συνθήκη]

Αν: (1), (2) η $A = (x-1) + (3-y) =$
 $= x-1 + 3-y =$
 $= x-y+2 \Rightarrow \underline{A = x-y+2}$

Π2. Είναι επίσης $1 < x < 4$ (3) [συνθήκη]

και $2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -3 < -y < -2$ (4)

Αν: (3) + (4) ποια σχέση;

$$1-3 < x-y < 4-2$$

$$-2 < x-y < 2 \quad \text{προσθέτουμε } 2$$

$$\Rightarrow -2+2 < x-y+2 < 2+2$$

$$\underline{0 < A < 4}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \Gamma 1. \quad A \cdot B &= (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = \\
 &= 2^2 - \sqrt{3}^2 = \quad [\text{διαφορά τετραγώνων}] \\
 &= 4 - 3 = 1 \\
 \Rightarrow A \cdot B &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma 2. \quad \Pi &= A^2 + B^2 = \\
 &= (2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2 = \\
 &= 4 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = \\
 &= 4 + 3 + 4 + 3 = 14 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Pi &= 14
 \end{aligned}$$

(β' τρόπος) για το $\Gamma 2$.

$$\begin{aligned}
 \Pi &= A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB = \\
 &= (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 = \quad [\text{από } \Gamma 1] \\
 &= 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14 \\
 \Rightarrow \Pi &= 14
 \end{aligned}$$

3) Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ ⁽¹⁾, $\lambda \in \mathbb{R}$ να πάρουμε

Γ1. Η Δισκρινουσα $\Delta = B^2 - 4AC = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) =$
 $= 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 =$
 $= 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$

Γ2. Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες πραγματικές
 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, πρέπει:

$\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, σύμφωνα (από Γ1)

$\Rightarrow 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 4(\lambda - 2)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Γ3. Είναι $x_1 + x_2 = S = -\frac{B}{A} = -\frac{-2\lambda}{1} = 2\lambda$, (2)

και $x_1 \cdot x_2 = P = \frac{C}{A} = \frac{4(\lambda - 1)}{1} = 4(\lambda - 1)$, (3)

Αρα $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ $\stackrel{(2)}{=} \stackrel{(3)}{=}$

$2\lambda = 4(\lambda - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\lambda = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\lambda - 4\lambda = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\lambda = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-4}{-2} = 2 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 2}$

4) Γ1. Είχα $\frac{|x+1|}{3} = \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$, εκ.ν. = 15

$$\Leftrightarrow 15 \cdot \frac{|x+1|}{3} = 15 \cdot \frac{|x+1|+4}{5} = 15 \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot |x+1| = 3(|x+1|+4) = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5|x+1| - 3|x+1| - 12 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x+1| = 12+10 \Leftrightarrow 2|x+1| = 22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x+1| = 11 \Leftrightarrow x+1 = 11 \vee x+1 = -11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 10} \vee \underline{x = -22} \quad (1)$$

Γ2. Για την $-x^2+2x+3 \leq 0$, λύσουμε την

ανίστοια $-x^2+2x+3=0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2}, \quad x_1 = \frac{-6}{-2} = 3, \quad x_2 = \frac{2}{-2} = -1,$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$-x^2+2x+3$	$-$	$+$	$-$	$-$

Άρα $-x^2+2x+3 \leq 0$, όταν $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ (2)

Γ3. Συνδυάζουμε τις ανισώσεις (1), (2)



Από το Σιγγραφίτη των λύσεων

οι λύσεις $= 22$ και 10 αληθών

στο ηέδιο λύσεων της (2)

5) Είχα $a_1 = 2$ και $a_{25} = a_{12} + 39$
 Η άρα από την τιμή της προόδου και της διαφοράς w

$$P1. \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{25} = a_{12} + 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_1 + (25-1)w = a_1 + (12-1)w + 39 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ 2 + 24w = 2 + 11w + 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ 24w - 11w = 39 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ 13w = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ w = \frac{39}{13} = 3 \Rightarrow \underline{w = 3} \end{cases}$$

P2. Ζητάμε το v ώστε $a_v = 152$ $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a_1 + (v-1)w = 152 \Leftrightarrow 2 + (v-1) \cdot 3 = 152 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3v - 3 = 152 - 2 \Leftrightarrow 3v = 150 + 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3v = 153 \Leftrightarrow v = \frac{153}{3} \Leftrightarrow \underline{v = 51}$

Άρα ο 51ος όρος $\underline{a_{51} = 152}$

P3. Ζητάμε το $S_{51} = a_1 + a_2 + \dots + a_{51} =$
 $= \frac{(a_1 + a_{51}) \cdot 51}{2} = \frac{(2 + 152) \cdot 51}{2} =$
 $= \frac{154 \cdot 51}{2} = 77 \cdot 51 = 3927$

Άρα $2 + 5 + 8 + \dots + 152 = 3927$