

A. Μετρήσεις Φυσικών μεγεθών**1. Φυσικά μεγέθη:**

Τα φυσικά μεγέθη είναι ποσότητες που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των φυσικών φαινομένων. Π.χ. χρόνος (t), μάζα (m), ενέργεια (E), ταχύτητα ($\vec{v}$), επιτάχυνση ($\vec{a}$), δύναμη ($\vec{F}$).

2. Μετρήσεις φυσικών μεγεθών

Μέτρηση φυσικού μεγέθους ονομάζεται η σύγκριση ενός μεγέθους με ένα άλλο ομοειδές που αποτελεί τη μονάδα μέτρησης. Από τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους βρίσκουμε έναν αριθμό ο οποίος ονομάζεται αριθμητική τιμή.

Η αριθμητική τιμή μαζί με την μονάδα μέτρησης αποτελεί το μέτρο του φυσικού μεγέθους
πχ το μήκος μιας ράβδου έχει μέτρο $0,8m$.

3. Θεμελιώδη και παράγωγα μεγέθη**Θεμελιώδη μεγέθη**

Είναι μεγέθη ξεχωριστής σημασίας και ο ορισμός τους δεν στηρίζεται σε άλλα φυσικά μεγέθη οι μονάδες τους ονομάζονται θεμελιώδεις μονάδες.

Παράγωγα μεγέθη

Ο ορισμός τους και οι μονάδες τους προκύπτουν από τα θεμελιώδη μεγέθη και τις μονάδες τους.

Παραδείγματα

α. Όγκος (V): είναι ένα παράγωγο φυσικό μέγεθος.

Σε ένα κύβο με πλευρά μήκους a ο όγκος δίδεται από τη σχέση: $V = a^3$

Από την την τελευταία προκύπτει η μονάδα όγκου $1m^3$

β. Ηλεκτρικό φορτίο (q):

Από τη σχέση $i = \frac{q}{t}$ προκύπτει η σχέση $q = it$ από την οποία προκύπτει η μονάδα φορτίου

$$1C : 1C = 1A \cdot s$$

Η μαθηματική σχέση που συνδέει ένα παράγωγο μέγεθος με τα θεμελιώδη μεγέθη ονομάζεται εξίσωση διαστάσεων.

Συχνά στη φυσική συναντάμε μεγέθη που είναι καθαροί αριθμοί. Αυτά τα μεγέθη ονομάζονται αδιάστατα μεγέθη πχ. Συντελεστής τριβής.

4. Διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.)**Προθέματα μονάδων**

Θεμελιώδη μεγέθη			
Μέγεθος	Σύμβολο	Μονάδα	Σύμβολο μονάδας
Μήκος	l	μέτρο	m
Μάζα	m	χιλιόγραμμα	kg
Χρόνος	t	δευτερόλεπτο	s
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	i	Ampere	A
Θερμοκρασία	T	Kelvin	K
Ποσότητα ουσίας	η	μολ	mol
Φωτεινή Ένταση	I_v	καντέλα	cd

Προθέματα μονάδων			
kilo	→	10^3	mili → 10^{-3}
Mega	→	10^6	micro → 10^{-6}
Giga	→	10^9	nano → 10^{-9}

Μονάδες μήκους (1 m)

Πολλαπλάσιο του 1 m $\rightarrow 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$

Υποπολλαπλάσιο του 1 m $\rightarrow 1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m} = 10^{-1} \text{ m}$

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m} = 10^{-2} \text{ m} \text{ και } 1 \text{ mm} = \frac{1}{1000} \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$$

Μονάδες εμβαδού (1 m^2)

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ m}^2 = (100 \text{ cm})^2 = 10^4 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$

Μονάδες όγκου (1 m^3)

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \rightarrow 1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ L, αφού } 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L,}$$

$$\text{άρα } 1 \text{ L} = \frac{1}{1000} \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Μονάδες πυκνότητας (ρ)

Ένα σώμα μάζας (m) που καταλαμβάνει όγκο (V) έχει πυκνότητα (d)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Ένα ομογενές σώμα έχει παντού την ίδια σύσταση, άρα για οποιαδήποτε κομμάτι του σώματος θα βρίσκουμε την ίδια πυκνότητα.

Ομογενές λέγεται ένα σώμα που έχει παντού την ίδια σύσταση δηλαδή έχει σταθερή πυκνότητα

$$\rho = \text{σταθερή}$$

Π.χ. πυκνότητα νερού $\rightarrow 1000 \text{ kg/m}^3 \rightarrow 1 \text{ g/cm}^3$.

5. Μονόμετρα και Διανυσματικά μεγέθη

Μονόμετρα λέγονται τα φυσικά μεγέθη που ορίζονται πλήρως όταν γνωρίζουμε το **μέτρο** τους (αριθμητική τιμή + μονάδα μέτρησης).

Π.χ. χρόνος (t), μάζα (m), ενέργεια (E), θερμοκρασία (T) 273 K

Διανυσματικά λέγονται τα φυσικά μεγέθη που ορίζονται πλήρως όταν γνωρίζουμε το **μέτρο** τους και την **κατεύθυνσή** τους και το σημείο εφαρμογής.

Όταν λέμε κατεύθυνση εννοούμε τη διεύθυνση και τη φορά του.

Το σύμβολο $\vec{F}$ αναφέρεται στο διάνυσμα κάποιας δύναμης και το βελλάκι μας δείχνει πως το μέγεθος δύναμη είναι διανυσματικό

Το σύμβολο F αναφέρεται στο μέτρο της δύναμης.

Έτσι όταν λέμε ότι μια δύναμη έχει μέτρο 10 N εννοούμε ότι $F = 10 \text{ N}$. Για να γνωρίζουμε τι μπορεί να προκαλέσει αυτή η δύναμη πρέπει να σχεδιάσουμε το διάνυσμα $\vec{F}$

6. Μεταβολή φυσικού μεγέθους

Μεταβολή του μεγέθους Ψ συμβολίζεται με $\Delta\Psi$ και είναι:

$$\Delta\Psi = \Psi_{\text{τελ}} - \Psi_{\text{αρχ}}$$

Διαφορά ονομάζεται η ποσότητα $\Psi_{\text{αρχ}} - \Psi_{\text{τελ}}$

Πχ. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B είναι $V_A - V_B$

Εφαρμογή

2. Η δύναμη αντίστασης που δέχεται ένα σώμα από τον αέρα δίδεται από τη σχέση $F = -bv$. Να βρείτε τις μονάδες της σταθεράς b

Λύση

$$F = -bv \Rightarrow b = -\frac{F}{v} \xrightarrow{\text{SI}} \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Β. Μαθηματική Θεμελίωση

1.Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο

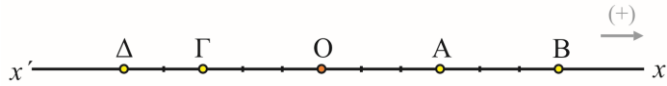
Ένα σύστημα δύο ορθογωνίων αξόνων xx' και yy' με κοινή αρχή ένα σημείο O ονομάζεται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και το χρησιμοποιούμε για να καθορίσουμε την θέση ενός σωματίου.

Προσδιορισμός θέσης σε ευθεία γραμμή (Ευθύγραμμες Κινήσεις)

Για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σωματίου στον άξονα $x'x$ πρέπει να πάρουμε ένα σημείο O σαν αρχή και να ορίσουμε ποια είναι η θετική φορά. Η θέση του σωματίου προσδιορίζεται με έναν αριθμό, ο οποίος συμβολίζεται με x και μπορεί να πάρει θετικές ή αρνητικές τιμές.

Όταν το σωματίο είναι στο A , η θέση του είναι $x = +3$ και όταν είναι στο Γ , είναι $x = -3$.

Ο βαθμολογημένος άξονας $x'Ox$ αποτελεί ένα **σύστημα αναφοράς**.



Προσδιορισμός θέσης στο επίπεδο (Καμπυλόγραμμες Κινήσεις)

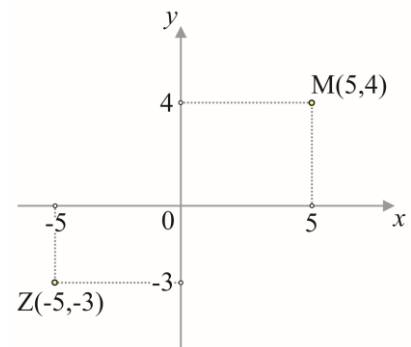
Η θέση του σωματίου M προσδιορίζεται με δύο αριθμούς (x, y) που ονομάζονται **συντεταγμένες**.

Για το σημείο M είναι: $(x = 5, y = 4)$.

Για το σημείο Z είναι: $(x = -5, y = -3)$

Το ορθογώνιο σύστημα xOy αποτελεί το

σύστημα αναφοράς.



Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ στο επίπεδο συμβολίζεται με d και υπολογίζεται με το πυθαγόρειο θεώρημα :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Αν το σωματίο κινείται στον άξονα $x'x$ τότε η απόσταση δύο θέσεων θα είναι :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

2. Στοιχεία Γεωμετρίας

Ισες γωνίες

Οι γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου

Οι απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου

Δύο εντός εναλλάξ γωνίες

Δύο εντός-εκτός και επι τα αυτά

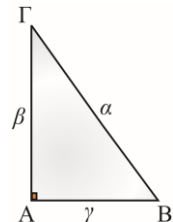
Δύο οξείες γωνίες που έχουν κάθετες πλευρές

Δύο κατακορυφήν γωνίες

Οι συμπληρωματικές ίσων γωνιών είναι ίσες

Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$



Μέτρηση γωνίας -Μήκος τόξου

Μία γωνία μετριέται σε μοίρες . Η φυσική μονάδα γωνίας είναι το ακτίνιο (1rad)

Ορισμός γωνίας

Θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\widehat{xOy} = \theta$ και κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R . Το τόξο του κύκλου που αντιστοιχεί στη γωνία θ έχει μήκος s και η γωνία ορίζεται με τον τύπο:

$$\theta = \frac{s}{R}$$

Έτσι το 1rad ορίζεται ως η επίκεντρη γωνία της οποίας το αντίστοιχο τόξο έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου

Βλέπουμε ότι η γωνία δεν έχει μονάδες (αδιάστατο μέγεθος)

Μία πλήρης γωνία αντιστοιχεί σε τόξο μήκους $s = 2\pi R$ έτσι η τιμή μιας πλήρους γωνίας σε ακτίνια είναι $2\pi\text{rad}$

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi\text{rad}$$

Μήκος τόξου

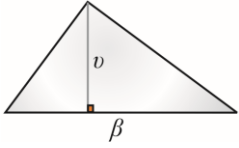
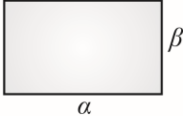
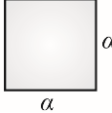
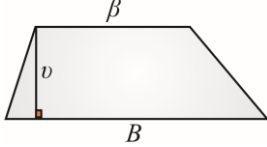
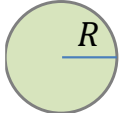
Από τον ορισμό της γωνίας μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος τόξου

$$s = R\theta$$

Μήκος κύκλου (s)

$$s = 2\pi R$$

Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

Τρίγωνο	$E = \frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2} = \frac{\beta v}{2}$	
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	$E = \alpha\beta = \text{βάση} \cdot \text{ύψος}$	
Τετράγωνο	$E = \alpha^2$	
Τραπέζιο	$E = \frac{(B + \beta)v}{2}$	
Κυκλικός δίσκος	$E = \pi R^2$	

Όγκοι Γεωμετρικών Σχημάτων

Όγκοι Γεωμετρικών Σχημάτων

Όγκος Κύβου : $V = \alpha^3$

α είναι η ακμή του κύβου

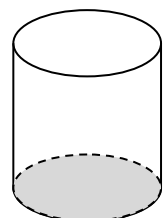
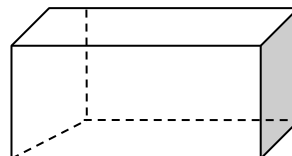
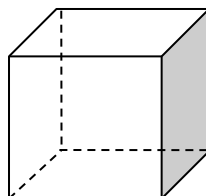
Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου :

$$V = Ah$$

Όπου A το εμβαδόν της βάσης και h το ύψος του

Όγκος κυλίνδρου: $V = Ah$

Όπου A το εμβαδόν της βάσης και h το ύψος του



3. Στοιχεία Τριγωνομετρίας

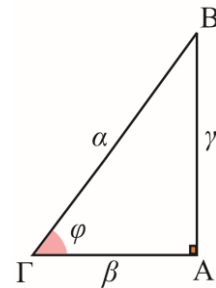
Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Η γωνία φ είναι οξεία.

Η κάθετη πλευρά γ ονομάζεται **απέναντι κάθετη** (από την φ).

Η πλευρά β ονομάζεται **προσκειμένη κάθετη** (στην φ).

Η πλευρά α ονομάζεται **υποτείνουσα**.



$$\eta\mu\varphi = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Τα $\eta\mu\varphi$, $\sigma\upsilon\nu\varphi$ είναι αριθμοί μικρότεροι του 1.

	0	30°	45°	60°	90°
$\eta\mu\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sigma\upsilon\nu\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\epsilon\varphi\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Σε συμπληρωματικές γωνίες, το ημίτονο της μιας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης.

• $\eta\mu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$, • $\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Χρήσιμες τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\begin{aligned}\eta\mu(-\theta) &= -\eta\mu\theta, & \sigma\upsilon\nu(-\theta) &= \sigma\upsilon\nu\theta \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sigma\upsilon\nu\theta, & \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \eta\mu\theta \\ \eta\mu(\pi - \theta) &= \eta\mu\theta, & \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) &= -\sigma\upsilon\nu\theta \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \sigma\upsilon\nu\theta \\ \eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi &= 1 \\ \eta\mu 2\alpha &= 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\end{aligned}$$

4. Βασικές Γνώσεις Άλγεβρας

Κλάσματα – δυνάμεις -ρίζες

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$$

$$\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$$

$$\sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

Τους ρητούς δεκαδικούς αριθμούς μπορούμε να τους γράψουμε και ως κλάσματα και αυτό διευκολύνει στον υπολογισμό δυνάμεων – ριζών

$$\sqrt{0,64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10}$$

$$\sqrt{0,3^2 + 0,4^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{16}{100}} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Ποσοστά

Ποσοστό είναι ένα κλάσμα (λόγος) που το εκφράζουμε με παρονομαστή το 100

Το κλάσμα κ/λ μπορεί να γραφτεί με παρονομαστή το 100

$$\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\frac{\kappa}{\lambda} \cdot 100}{100} = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot 100\%$$

Στη φυσική το δύσκολο δεν είναι να βρούμε το ποσοστό αλλά να δημιουργήσουμε το κλάσμα που μας ζητάνε. Έτσι πριν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το ποσοστό πρέπει να γράψουμε το κλάσμα στο οποίο αναφερόμαστε

Ένα φυσικό μέγεθος x έχει αρχική τιμή x_o και σε κάποιο φυσικό φαινόμενο το μέγεθος μεταβάλλεται κατά Δx . Την μεταβολή μπορούμε να την εκφράσουμε ως ποσοστό αν φτιάξουμε το κλάσμα

$$\frac{\Delta x}{x_o} = \frac{\Delta x}{x_o} \cdot \frac{100}{100} = \frac{\Delta x}{x_o} 100\%$$

Παραδείγματα

1. Σώμα μάζας m κινείται αρχικά με ταχύτητα v_o και επιταχύνεται. Όταν η ταχύτητα διπλασιαστεί να βρείτε το ποσοστό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας

Το ζητούμενο κλάσμα είναι :

$$\frac{\text{Μεταβολή Κινητικής Ενέργειας}}{\text{Αρχική κινητική Ενέργεια}} = \frac{\Delta K}{K_o}$$

$$K_o = \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$K_{\text{τελ}} = K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2v_o)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}mv_o^2 = 4K_o$$

$$\frac{\Delta K}{K_o} = \frac{4K_o - K_o}{K_o} = \frac{3K_o}{K_o} = 3 = \frac{3 \cdot 100}{100} = \frac{300}{100} = 300\%$$

2. Σώμα ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Ασκούμε στο σώμα οριζόντια σταθερή δύναμη F και το σώμα επιταχύνεται. Αν η δύναμη τριβής έχει μέτρο $T = 0,5F$ να βρείτε το ποσοστό της προσφερόμενης ενέργειας στο σώμα η οποία γίνεται θερμότητα

Το κλάσμα που μας ενδιαφέρει είναι

$$\frac{Q}{E_{\pi\rho}}$$

Η προσφερόμενη ενέργεια είναι ίση με το έργο της δύναμης F : $E_{\pi\rho} = W_F = Fx$

Η θερμότητα συνδέεται με το έργο της τριβής και είναι : $Q = |W_T| = Tx$

$$\frac{Q}{E_{\pi\rho}} = \frac{Tx}{Fx} = \frac{T}{F} = 0,5 = \frac{0,5 \cdot 100}{100} = 50\%$$

Ταυτότητες:

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

Ρίζες δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Αν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ τότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Λογάριθμοι

i. Δεκαδικοί Λογάριθμοι

Κάθε θετικός αριθμός μπορεί να γραφτεί σαν δύναμη του 10

$$1 = 10^0$$

$$10 = 10^1$$

$$100 = 10^2$$

$$1000 = 10^3$$

$$\alpha = 10^\beta$$

Ο εκθέτης β ονομάζεται δεκαδικός λογάριθμος του α και συμβολίζεται με $\log \alpha$ έτσι γράφουμε:

$$\log 1000 = 3, \quad \log 1 = 0$$

ii. Νεπέριοι ή φυσικοί λογάριθμοι

Ο αριθμός e είναι ένας υπερβατικός αριθμός ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \approx 2,72$$

Ένας θετικός αριθμός a μπορεί να γραφεί ως δύναμη του e

$$a = e^x$$

Ο εκθέτης x ονομάζεται νεπέριος ή φυσικός λογάριθμος του a

Ιδιότητες λογαρίθμων

$$e = 2,71828..$$

$$e^0 = 1$$

$$\ln(a \cdot \beta) = \ln a + \ln \beta$$

$$\ln\left(\frac{a}{\beta}\right) = \ln a - \ln \beta$$

$$\ln a^v = v \ln a$$

$$e^{\ln x} = x, \quad e^{-\ln x} = 1/x$$

5. Συναρτήσεις- Γραφικές Παραστάσεις

α. Η συνάρτηση $y = ax$, $a \neq 0$ (Ανάλογα ποσά)

Τα μεγέθη x και y έχουν **σταθερό λόγο** και λέγονται **ανάλογα**

Η γραφική παράσταση είναι ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Παραδείγματα από την φυσική

i. Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η ταχύτητα είναι σταθερή και ισχύει $\Delta x = v\Delta t$ δηλαδή τα μεγέθη Δx και Δt είναι ανάλογα

ii. Σε ένα αντιστάτη η αντίσταση είναι σταθερή και ισχύει $V = IR$ όπου V , I η τάση στα άκρα του αντιστάτη και I η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει, δηλαδή τα μεγέθη V και I είναι ανάλογα

iii. Σε μια ομαλή κυκλική κίνηση η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή και ισχύει $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ δηλαδή τα μεγέθη $\Delta\varphi$ και Δt είναι ανάλογα

***Αντιστρόφως ανάλογα** ονομάζονται δύο μεγέθη που έχουν σταθερό γινόμενο

β. Η συνάρτηση $y = ax + \beta$, $a, \beta \neq 0$ (γραμμική συνάρτηση)

Η συνάρτηση είναι πρώτου βαθμού. Η γραφική της παράσταση είναι ευθεία γραμμή και λέμε ότι η σχέση μεταξύ των μεγεθών x, y είναι **γραμμική**

Για την χάραξη μιας ευθείας απαιτούνται δύο σημεία

Προσοχή τα ποσά x, y δεν είναι ανάλογα

Π.χ. $y = 2x + 4$, όπου $x \in [0,5]$.

Η γραφική παράσταση είναι ευθεία.

Για να χαράξουμε μία ευθεία χρειαζόμαστε δύο σημεία.

$\Delta x = 5 - 0 = 5$ και $\Delta y = 14 - 4 = 10$.

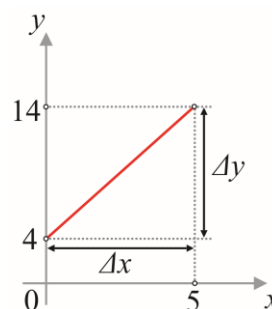
Στο ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές δείχνουν τις μεταβολές $\Delta x, \Delta y$ των δύο μεγεθών. Το πηλίκο

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ονομάζεται **κλίση της ευθείας** και είναι ίσο με το συντελεστή του x .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{5} = 2 = \text{συντελεστής του } x$$

x	y
0	4
5	14



Παράδειγμα

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο:

$$v = v_0 + at$$

γ. $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$

Η γραφική παράσταση είναι καμπύλη (Παραβολή)

Όταν $a > 0$ η συνάρτηση παίρνει κάποια ελάχιστη τιμή όταν $x = -\frac{\beta}{2a}$

Όταν $a < 0$ η συνάρτηση παίρνει κάποια μέγιστη τιμή

δ. Σταθερή συνάρτηση $y = \text{σταθ}$

Σε αρκετά φυσικά φαινόμενα υπάρχουν ποσότητες που μένουν σταθερές. Η γραφική παράσταση μιας σταθερής συνάρτησης είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα του χρόνου.

Πχ. Σε μια ελεύθερη πτώση η μηχανική ενέργεια $E_{μηχ}$ παραμένει σταθερή

ε. Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις Εξισώσεις

$$y = A\eta\mu x$$

$$y = A\sigma\upsilon\nu x$$

$$\eta\mu\chi = \eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{cases} \quad \kappa = \text{ακέραιος}$$

6. Ρυθμός μεταβολής και Γεωμετρική Ερμηνεία

Μεταβολή φυσικού μεγέθους

Η μεταβολή ενός φυσικού μεγέθους Ψ συμβολίζεται με $\Delta\Psi$ και είναι :

$$\Delta\Psi = \Psi_{\text{τελ}} - \Psi_{\text{αρχ}}$$

Η χρονική διάρκεια της μεταβολής συμβολίζεται με Δt .

Μέσος ρυθμός μεταβολής Φυσικού μεγέθους Ψ

Αναφέρεται σε κάποιο καθορισμένο χρονικό διάστημα (μικρό ή μεγάλο) και ορίζεται ως το πηλίκο:

$$\text{Μέσος ρυθμός μεταβολής} = \frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$$

Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μεγέθους Ψ

Αναφέρεται σε κάποια χρονική στιγμή και συμβολίζεται με

$$\frac{d\Psi}{dt}$$

$$d\Psi = \text{μεταβολή που αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα } dt$$

Το χρονικό διάστημα dt δεν είναι καθορισμένο αλλά τείνει προς το μηδέν

Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής λέγεται και «ρυθμός μεταβολής».

Αν ρυθμός μεταβολής είναι σταθερός τότε συμπίπτει με το μέσο ρυθμό μεταβολής.

Γεωμετρική Ερμηνεία του ρυθμού μεταβολής

Στο διάγραμμα βλέπουμε την γραφική παράσταση ενός φυσικού μεγέθους Ψ συναρτήσει του χρόνου.

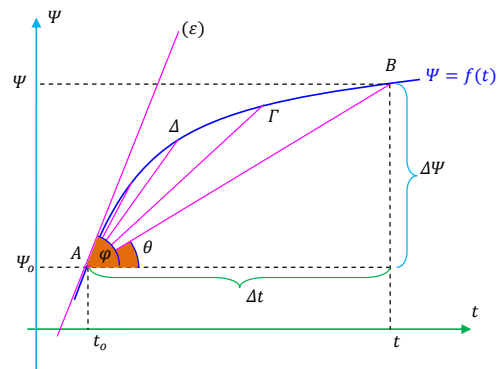
Τη χρονική στιγμή t_0 η συνάρτηση έχει τιμή Ψ_0 , τη στιγμή t έχει τιμή Ψ

Στο χρονικό διάστημα: $\Delta t = t - t_0$

η μεταβολή του φυσικού μεγέθους είναι: $\Delta\Psi = \Psi - \Psi_0$

Το A έχει συντεταγμένες $A(t_0, \Psi_0)$

Το B έχει συντεταγμένες $B(t, \Psi)$



Τέμνουσα της γραφικής παράστασης και μέσος ρυθμός μεταβολής

Η ευθεία AB ονομάζεται **τέμνουσα** και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα του χρόνου.

$$\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \text{κλίση της τέμνουσας}$$

και είναι ίση με το **μέσο ρυθμό μεταβολής** στο χρονικό διάστημα Δt

Εφαπτομένη της γραφικής παράστασης και στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής (παράγωγος)

Αν μικραίνουμε συνέχεια το χρονικό διάστημα οι κάθετες πλευρές Δt , $\Delta\Psi$ μικραίνουν συνεχώς ώσπου τελικά η τέμνουσα γίνεται σχεδόν **εφαπτομένη της γραφικής παράστασης**. Τότε το χρονικό διάστημα συμβολίζεται με dt και η αντίστοιχη μεταβολή συμβολίζεται με $d\Psi$ ενώ η γωνία θ παίρνει μία οριακή τιμή.

$$\frac{d\Psi}{dt} = \text{κλίση της εφαπτομένης } (\epsilon)$$

και είναι ίση με το **στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής** του μεγέθους Ψ τη χρονική στιγμή t_0

Αν το μέγεθος Ψ είναι πρώτου βαθμού συνάρτηση ως προς t η γραφική παράσταση είναι ευθεία και η κλίση της είναι σταθερή οπότε και ο ρυθμός μεταβολής θα είναι σταθερός και θα συμπίπτει με το μέσο ρυθμό μεταβολής και ισχύει:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \lambda = \text{σταθερό} = \frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$$

Όταν λέμε ρυθμός μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους αναφερόμαστε στο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής

Υπολογισμοί από τη γραφική Παράσταση

Αν κάποιο φυσικό μέγεθος x ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής κάποιου άλλου φυσικού μεγέθους y

$$x = \frac{dy}{dt}$$

Τότε μπορούμε να κάνουμε το διάγραμμα $x = f(t)$

Το εμβαδό κάτω από τη γραφική παράσταση μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 είναι ίσο με την μεταβολή του μεγέθους y στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$

Παραδείγματα:

1. Η ταχύτητα ορίζεται ως ρυθμός μεταβολής της θέσης

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Έτσι από το διάγραμμα $v - t$ μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή της θέσης Δx που είναι η μετατόπιση του σώματος σε κάποιο χρονικό διάστημα Δt

2. Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος ορίζεται ως ο ρυθμός ροής ηλεκτρικού φορτίου

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Έτσι από το διάγραμμα $i - t$ μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό φορτίο που πέρασε από κάποια διατομή στο χρονικό διάστημα Δt που επιθυμούμε.

Εφαρμογές από τη Φυσική

1. Ένα φυσικό μέγεθος A ά έχει αρχική τιμή A_o και μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση :

$$A = A_o e^{-\Lambda t}$$

α. Δείξτε γραφικά πως μεταβάλλεται το μέγεθος A με το χρόνο

β. Να βρείτε τις μονάδες του Λ

γ. Ποια χρονική στιγμή τ η τιμή του A θα είναι ίση με το μισό της αρχικής της τιμής

δ. Ποια θα είναι η τιμή του A τη χρονική στιγμή $t = 2\tau$

Λύση:

α. Για $t_o = 0$ είναι $A = A_o$

Για $t_o \rightarrow \infty$ είναι $A \rightarrow 0$

β.

$$A = A_o e^{-\Lambda t} \Rightarrow e^{-\Lambda t} = \frac{A}{A_o} \Rightarrow e^{-\Lambda t} = \text{καθαρός αριθμός} \Rightarrow \Lambda t = \text{καθαρός αριθμός} \Rightarrow \Lambda \rightarrow s^{-1}$$

γ.

$$A = \frac{A_o}{2} \Rightarrow A_o e^{-\Lambda \tau} = \frac{A_o}{2} \Rightarrow e^{-\Lambda \tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{e^{\Lambda \tau}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\Lambda \tau} = 2 \Rightarrow \ln e^{\Lambda \tau} = \ln 2 \Rightarrow \Lambda \tau = \ln 2 \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

δ.

$$A = A_o e^{-\Lambda 2\tau} = A_o (e^{-\Lambda \tau})^2 = A_o \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{A_o}{4}$$

2. Ένα φυσικό μέγεθος x μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση

$$x = 0,4\eta\mu 10t$$

α. Τι μονάδες έχει το γινόμενο $10t$

β. Βρείτε ποιες χρονικές στιγμές είναι $x = 0$

γ. Δείξτε γραφικά πως μεταβάλλεται το μέγεθος x με την πάροδο του χρόνου

δ. Βρείτε ποια χρονική στιγμή είναι $x = 0,2$ για δεύτερη και για τρίτη φορά

Λύση

α. Το $\eta\mu 10t$ και η γωνία $10t$ είναι καθαρός αριθμός. Το 10 είναι η αριθμητική τιμή ενός μεγέθους του οποίου οι μονάδες θα είναι s^{-1}

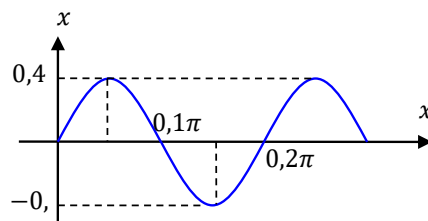
β.

$$x = 0 \Rightarrow 0,4\eta\mu 10t = 0 \Rightarrow \eta\mu 10t = 0 \Rightarrow 10t = k\pi \Rightarrow t = k \frac{\pi}{10}$$

Επειδή ο χρόνος παίρνει μόνο θετικές τιμές το k παίρνει τιμές $k=0,1,2..$

γ. Γραφική παράσταση

δ. Η δεύτερη φορά προκύπτει για $k=1$ και είναι $t = \frac{\pi}{10}$



3. Η ένταση ενός εναλασσομένου ρεύματος μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$i = 20\sqrt{2}\eta\mu 100\pi t$$

α. Ποια χρονική στιγμή η ένταση του ρεύματος γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά

β. Ποια χρονική στιγμή η ένταση μηδενίζεται για δεύτερη φορά

γ. Ποια χρονική στιγμή θα είναι $i = 20A$ για δεύτερη φορά

Λύση

α. Η ένταση γίνεται μέγιστη όταν $\eta\mu 100\pi t = 1$ και η μέγιστη τιμή είναι $I = 20\sqrt{2}$

$$\eta\mu 100\pi t = 1 = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow 100\pi t = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Η μικρότερη τιμή του χρόνου (πρώτη φορά) προκύπτει για $k = 0$ και είναι:

$$100\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{200} = \frac{5}{1000} s = 5ms$$

β.

$$i = 0 \Rightarrow 20\sqrt{2}\eta\mu 100\pi t = 0 \Rightarrow \eta\mu 100\pi t = 0 \Rightarrow 100\pi t = k\pi, k = 0,1,..$$

Η δεύτερη φορά προκύπτει για $k = 1$

$$100\pi t = \pi \Rightarrow t = \frac{1}{100} = 10ms$$

γ.

$$i = 20A \Rightarrow 20\sqrt{2}\eta\mu 100\pi t = 20 \Rightarrow \eta\mu 100\pi t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \eta\mu 100\pi t = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 100\pi t = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k = 0,1,.. (A) \\ 100\pi t = 2k\pi + 3\frac{\pi}{4}, k = 0,1,.. (B) \end{cases}$$

Η δεύτερη φορά προκύπτει από την (B) για $k = 0$

$$100\pi t = 3\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{3}{400} = 7,5ms$$

4. Σώμα μάζας $m = 1kg$ αφήνεται ελεύθερο από σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος $H = 20m$ από το έδαφος και φτάνει σε σημείο Γ του εδάφους. Γράψτε τις συναρτήσεις που μας δείχνουν πως μεταβάλλονται

α. Η ταχύτητα v , το ύψος y από το δάπεδο, η κινητική ενέργεια, η δυναμική και η μηχανική ενέργεια με το χρόνο και κάντε τις γραφικές παραστάσεις

β. Η κινητική, η δυναμική και η μηχανική ενέργεια σε συνάρτηση με το ύψος h από το δάπεδο και κάντε τις γραφικές παραστάσεις

Λύση

Θεωρώ την αρχή του κατακόρυφου άξονα την αρχική θέση του σώματος και θετική φορά προς τα κάτω
Η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση

Όταν το σώμα έχει συντταγμένη y βρίσκεται σε ύψος h ($h = H - y$)

$$v = gt = 10t$$

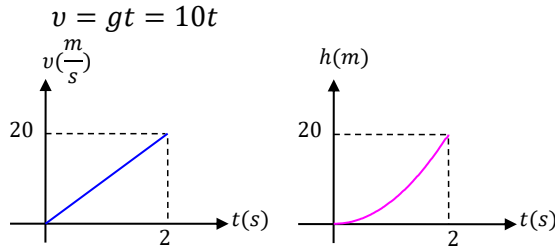
$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = H - y = H - \frac{1}{2}gt^2 = 20 - 5t^2$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(gt)^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2 = 50t^2$$

$$U = mgh = mg\left(H - \frac{1}{2}gt^2\right) = 10(20 - 5t^2) = 200 - 50t^2$$

$$E_{μηχ} = K + U = 200 = \text{σραθερή}$$



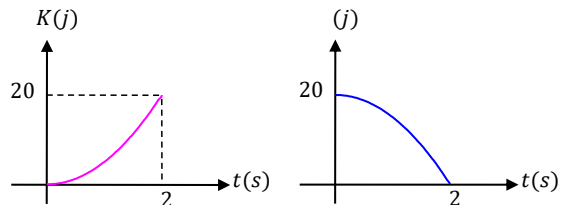
Όταν το σώμα φτάνει στο έδαφος είναι $h = 0$ και τότε : $20 - 5t^2 = 0 \Rightarrow t = 2s$

β.

$$U = mgh = 10h$$

$$E_{μηχ} = K + U = 200 = \text{σραθερή}$$

$$K = E_{μηχ} - U = 200 - 10h$$



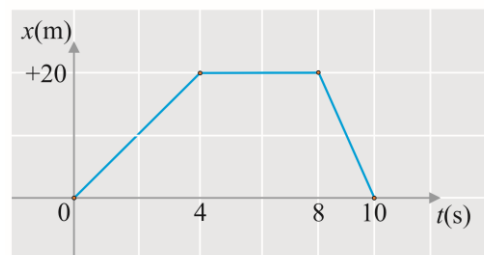
5. Σημειακό αντικείμενο κινείται στον άξονα $x'x$. Η θέση του σώματος αλλάζει όπως δείχνει το διάγραμμα.

α. Πως ονομάζεται ο ρυθμός μεταβολής της θέσης

β. Βρείτε την ρυθμό μεταβολής της θέσης στα χρονικά διαστήματα (0 έως 4s), (4 έως 8s) και (8 έως 10s)

γ. Κάντε το διάγραμμα ταχύτητας -χρόνου

δ. Βρείτε την μαθηματική συνάρτηση η οποία δίνει την θέση του αντικειμένου κάθε χρονική στιγμή



Λύση

α. Ο ρυθμός μεταβολής θέσης είναι η ταχύτητα του σώματος

β.

$$(0 \text{ έως } 4s): v = \text{σταθ} = v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{4 - 0} = 5m/s$$

$$(4 \text{ έως } 8s): v = 0$$

$$(8 \text{ έως } 10s): v = \text{σταθ} = v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 20}{10 - 8} = -10m/s$$

δ. Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση : $x = x_o + v\Delta t$

(0 έως 4s) είναι : $x = 0 + 5t = 5t$

(4 έως 8s) είναι $x = 20$

(8 έως 10s) είναι : $x = 20 - 10\Delta t = 20 - 10(t - 8) = 100 - 10t$

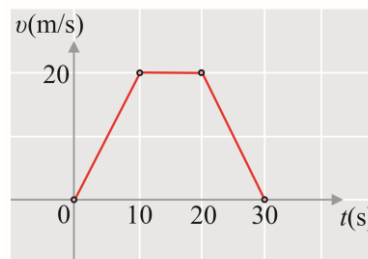
6. Δίνεται το διάγραμμα $v-t$ του σχήματος σε μια ευθύγραμμη κίνηση σημειακού σώματος

α. Πως ονομάζεται ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας

β. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας στα χρονικά διαστήματα 0 s έως 10 s, 10 s έως 20 s, 20 s έως 30 s.

γ. Βρείτε την μετατόπιση Δx στο χρονικό διάστημα 20 s έως 30 s

δ. Βρείτε την μαθηματική συνάρτηση η οποία δίνει την ταχύτητα του αντικειμένου κάθε χρονική στιγμή



Λύση

α. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση

β.

$$(0 \text{ έως } 10s): \alpha = \text{σταθ} = \alpha_{\mu} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{10 - 0} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$(10 \text{ έως } 20s): \alpha = 0$$

$$(20 \text{ έως } 30s): \alpha = \text{σταθ} = \alpha_{\mu} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 20}{30 - 20} = -2 \text{ m/s}^2$$

γ. Η μετατόπιση Δx σε κάθε χρονικό διάστημα υπολογίζεται με εμβαδομέτρηση

$$(20 \text{ έως } 30s): \Delta x = \text{Εμβαδόν} = \frac{1}{2} 10 \cdot 20 = 100 \text{ m}$$

δ.

$$v = v_0 + a\Delta t$$

$$(0 \text{ έως } 10s): v = 0 + 2(t - 0) = 2t$$

$$(10 \text{ έως } 20s): v = 20$$

$$(20 \text{ έως } 30s): v = 20 + (-2)(t - 20) = 20 - 2(t - 20) = 60 - 2t$$

Γ. Πράξεις με διανύσματα

1. Ορισμοί

Ομόρροπα Διανύσματα

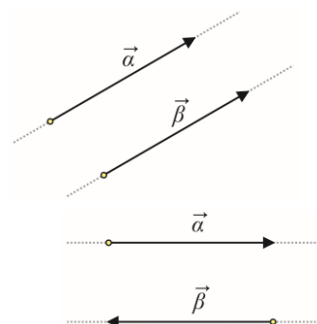
Ομόρροπα λέγονται τα διανύσματα που έχουν ίδια κατεύθυνση.

Αντίρροπα Διανύσματα

Αντίρροπα λέγονται τα διανύσματα που έχουν αντίθετη κατεύθυνση.

Ίσα Διανύσματα

Ίσα διανύσματα ($\vec{a} = \vec{\beta}$) έχουν $\left\{ \begin{array}{l} \text{ίδιο μέτρο } \alpha = \beta \\ \text{ίδια κατεύθυνση} \end{array} \right.$



Αντίθετα Διανύσματα

Αντίθετα διανύσματα ($\vec{a} = -\vec{\beta}$) έχουν $\left\{ \begin{array}{l} \text{ίδιο μέτρο } \alpha = \beta \\ \text{αντίθετη κατεύθυνση} \end{array} \right.$

Πρόσθεση 2 Διανυσμάτων που έχουν την ίδια αρχή

Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα πρέπει να είναι ομοειδή (να έχουν ίδιες μονάδες).

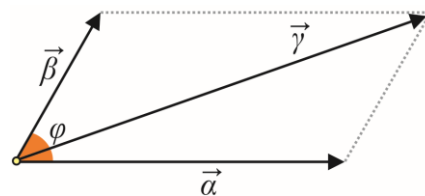
Από την πρόσθεση δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ προκύπτει ένα τρίτο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που ονομάζεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη**.

$$\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

Για να βρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ χρησιμοποιούμε τον κανόνα

παραλληλογράμμου. Σχεδιάζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

Η διαγώνιος του παραλληλογράμμου αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.



Τα μέτρα των διανυσμάτων συμβολίζονται με α, β, γ

Το μέτρο της συνισταμένης υπολογίζεται με τον τύπο:

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sin\varphi}$$

Όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι συνιστώσες $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$

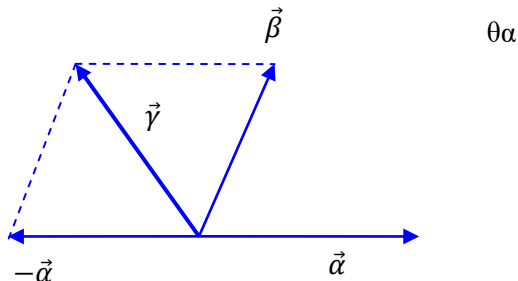
Αφαίρεση Διανυσμάτων

Για να αφαιρέσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ από ένα διάνυσμα $\vec{a}$ προσθέσουμε στο $\vec{a}$ το $\vec{\beta}$

$$\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta}) = \vec{\gamma}$$

Αν φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ το βρίσκουμε από τον τύπο:

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sin(180 - \varphi)}$$



Ανάλυση Διανύσματος

Ένα διάνυσμα $\vec{a}$ μπορεί να αντικατασταθεί από δύο διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ για τα οποία ισχύει

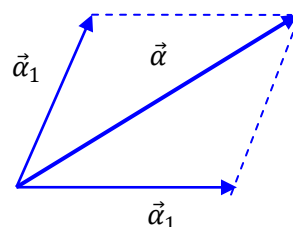
$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}$$

Τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος $\vec{a}$

Η ανάλυση διανύσματος γίνεται με κανόνα παραλληλογράμμου.

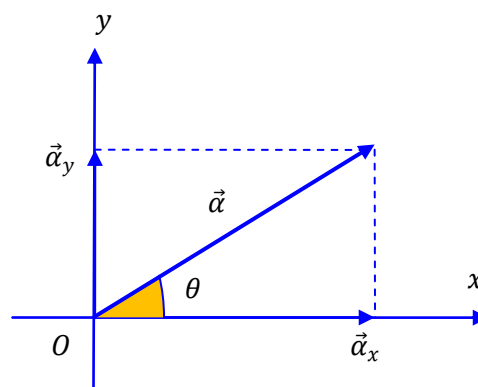
Αν οι συνιστώσες βρίσκονται σε 2 κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ συμβολίζονται με $\vec{a}_x$ και $\vec{a}_y$ που έχουν μέτρα α_x και α_y αντίστοιχα.

Αν θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα $x'x$ ισχύει



Από το σχήμα

$$\alpha_x = \alpha \sin\theta \quad \text{και} \quad \alpha_y = \alpha \eta\mu\theta$$



Μέτρο και αλγεβρική τιμή διανύσματος

Μέτρο Διανύσματος

Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{a}$ συμβολίζεται με α και είναι πάντα θετικό. Μπορούμε αν θέλουμε να το συμβολίσουμε και με $|\alpha|$

Αλγεβρική τιμή διανύσματος

Αν το διάνυσμα $\vec{a}$ βρίσκεται πάνω σε κάποιον προσανατολισμένο άξονα τότε έχει νόημα να μιλάμε για αλγεβρική τιμή του διανύσματος.

Η αλγεβρική τιμή του διανύσματος συμβολίζεται με α και μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

$$\alpha = +|\alpha| \quad \text{ή} \quad \alpha = -|\alpha|$$

Το πρόσημο μας δείχνει την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{a}$

Αν έχουμε πολλά διανύσματα στον ίδιο άξονα τότε η πρόσθεση και η αφαίρεση διανυσμάτων ανάγεται σε πρόσθεση ή αφαίρεση αλγεβρικών τιμών .

Σημείωση ΣΟΣ.

Στην Ελληνική βιβλιογραφία χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο και για το μέτρο και για την αλγεβρική τιμή διανύσματος . Στην επόμενη παράγραφο θα προσπαθήσουμε να ξεκαθαρίσουμε πότε το σύμβολο a θα αναφέρεται στο μέτρο και πότε θα αναφέρεται στην αλγεβρική τιμή.

Μέτρο ή Αλγεβρική τιμή ;

Αν σε ένα φαινόμενο έχουμε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τότε

i. Αν τα διανύσματα δεν έχουν όλα την ίδια διεύθυνση

τότε τα σύμβολα a, β, γ αναφέρονται στα μέτρα τους . Την κατεύθυνση των διανυσμάτων την δείχνουμε στο σχήμα.

ii. Αν τα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση

τότε τα σύμβολα a, β, γ μπορεί να αναφέρονται ή στα μέτρα τους ή στις αλγεβρικές τους τιμές.

Σχεδιασμένα διανύσματα

Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι σχεδιασμένα τότε η κατεύθυνση τους είναι γνωστή και τα σύμβολα a, β, γ αναφέρονται στα μέτρα των διανυσμάτων

Μη σχεδιασμένα διανύσματα

Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ δεν είναι σχεδιασμένα τότε τα σύμβολα a, β, γ αναφέρονται στις αλγεβρικές τους τιμές.

★ Σύμβολα που εκφράζουν πράξεις μεταξύ διανυσμάτων που βρίσκονται στον ίδιο άξονα εκφράζουν αλγεβρικές τιμές.

Έτσι τα σύμβολα $\Sigma F, \Sigma F_x, \Sigma F_y$ εκφράζουν αλγεβρικές τιμές αφού προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αλγεβρικών τιμών.

Όταν μετασχηματίζουμε μια διανυσματική σχέση σε αλγεβρική χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές .πχ

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} , a = \frac{\Delta v}{\Delta t} , v = v_o + at$$