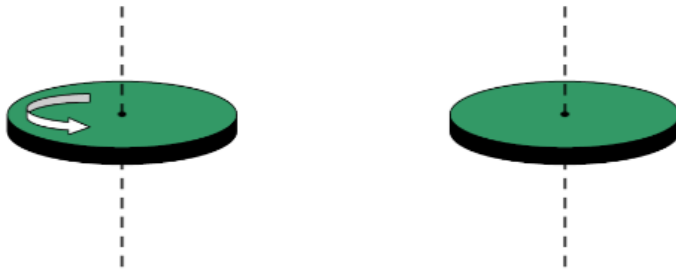


ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ , ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ , ΚΥΛΙΣΗ ΤΡΟΧΟΥ

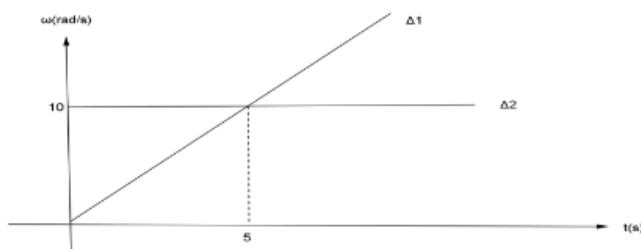
1. Ο ομογενής και ισοπαχής δίσκος του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος. Τη στιγμή $t_0=0$ ξεκινά να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Τη στιγμή $t_A = 4\text{s}$, ο δίσκος αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, μέχρι να σταματήσει.



- α) Στο πρώτο σχήμα να σχεδιαστεί το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}_1$ και το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{a}_{\gamma 1}$ του δίσκου κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της επιταχυνόμενης κίνησής του.
 β) Στο δεύτερο σχήμα να σχεδιαστούν τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}_2$ και της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{a}_{\gamma 2}$ του δίσκου κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησής του.

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής:

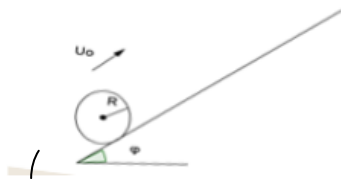
- γ) Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις $\omega = f(t)$ της γωνιακής ταχύτητας για όλη τη διάρκεια της κίνησης.
 δ) Να γίνει η γραφική παράσταση $\omega-t$ για τη συνολική κίνηση.
 ε) Να γραφεί η χρονική εξίσωση $\theta = f(t)$ της γωνίας στροφής στην επιταχυνόμενη κίνηση.
 στ) Να υπολογιστεί η γωνία στροφής $\Delta\theta$, κατά τη διάρκεια του 2^{ου} δευτερολέπτου της επιβραδυνόμενης κίνησης.
 ζ) Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των περιστροφών N , που εκτέλεσε ο τροχός από $t_0=0$ μέχρι να σταματήσει.
2. Δύο δίσκοι οριζόντιοι Δ_1 και Δ_2 εκτελούν περιστροφική κίνηση γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας τους. Οι δίσκοι περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα που μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ζητείται:

- α) Η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά κάθε δίσκος.
 β) Την $t=5\text{s}$ πόσες περιστροφές έχει κάνει ο δίσκος Δ_2 περισσότερες από τον δίσκο Δ_1 ;
 γ) Ποιά χρονική στιγμή οι 2 δίσκοι έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό περιστροφών;
 δ) Αν οι 2 τροχοί έχουν ακτίνες $R_2=R$, $R_1=2R$, να βρεθεί ποια στιγμή τα σημεία της περιφέρειάς τους θα έχουν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες.

3. Από τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσης $\varphi = \frac{\pi}{6}$ rad εκτοξεύεται προς τα πάνω τροχός ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$.

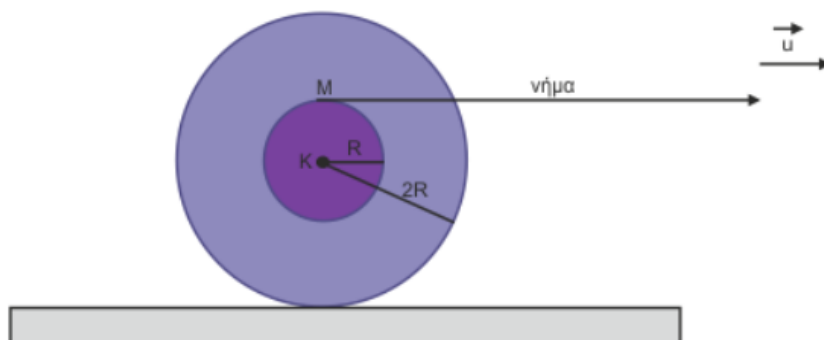


Ο τροχός φτάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος, σταματά στιγμιαία και μετά αρχίζει να κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο.

Θεωρούμε ότι η επιβράδυνση του τροχού κατά την άνοδο είναι ίση κατά μέτρο με την επιτάχυνση που απέκτησε ο τροχός κατά την κάθοδό του και ισχύει:

$$|\alpha_{cm}(\text{ανόδου})| = \alpha_{cm}(\text{καθόδου}) = 2 \text{ m/s}^2. \text{ Να βρεθούν:}$$

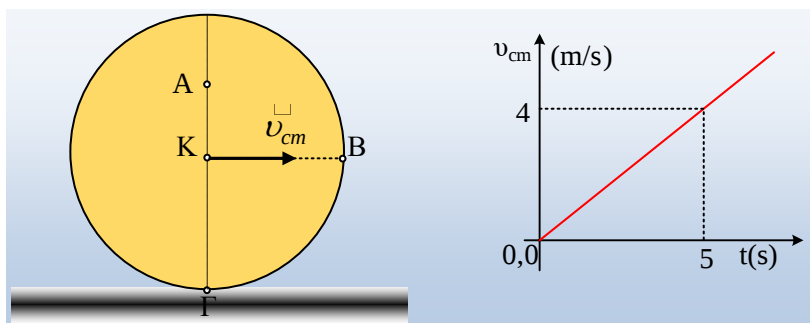
- Ο χρόνος ανόδου.
 - Το μέγιστο ύψος h από το έδαφος που φτάνει ο τροχός.
 - Τη γωνία που θα διαγράψει μια ακτίνα R του τροχού κατά την κάθοδό του.
 - Το διάγραμμα του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο $(\omega - t)$, για όλη την κίνηση.
4. Ένα στερεό αποτελείται από 2 κατακόρυφους ομοαξονικούς κυλίνδρους κολλημένους μεταξύ τους που έχουν ακτίνες R και $2R$. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κοινό οριζόντιο άξονα των 2 κυλίνδρων σαν ένα σώμα. Στην περιφέρεια του κυλίνδρου ακτίνας R έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τραβάμε το νήμα οριζόντια με επιτάχυνση $a = 3 \text{ m/s}^2$ ώστε το νήμα να ξετυλίγεται και το στερεό να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



Ζητείται:

- Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού.
- Όταν έχει ξετυλιχθεί μήκος νήματος $l = 5 \text{ m}$, πόσο έχει μετακινηθεί το κέντρο μάζας του στερεού.
- Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού εκείνη τη στιγμή (αν δίνεται ότι η ακτίνα του μικρού κυλίνδρου είναι $R = 0,1 \text{ m}$).
- Να βρεθεί η ταχύτητα του υψηλότερου σημείου του στερεού εκείνη τη στιγμή.

5. Ένας λεπτός δίσκος, ακτίνας $R=0,8\text{m}$ αρχικά ακίνητος σε οριζόντιο επίπεδο, δέχεται κατάλληλη δύναμη οπότε αρχίζει να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει). Στο πρώτο σχήμα βλέπετε τον κυλιόμενο δίσκο, ενώ στο δεύτερο δίνεται η ταχύτητα του κέντρου του K (και κέντρου μάζας του), σε συνάρτηση με το χρόνο.



- Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του κέντρου K , καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.
- Να υπολογιστεί η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου A , πάνω στην κατακόρυφο διάμετρο, το οποίο απέχει κατά $(KA)=r=0,4\text{m}$ από το κέντρο του δίσκου.
- Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή t_1 το σημείο B , στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, έχει κατακόρυφη επιτάχυνση. Πόση είναι τη στιγμή αυτή η επιτάχυνση του σημείου Γ , στο άκρο της κατακόρυφης ακτίνας, σημείο επαφής με το οριζόντιο επίπεδο;

6.

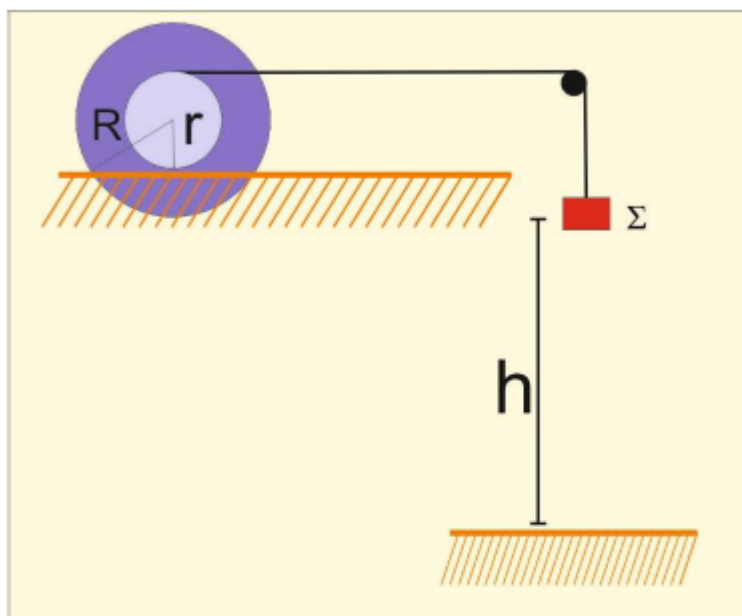
Ο δίσκος του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα $R = 0,4\text{ m}$. Σε απόσταση r από το κέντρο του δίσκου είναι χαραγμένο αυλάκι γύρω από το οποίο έχει τυλιχτεί αβαρές και μη εκτατό νήμα, το ελεύθερο άκρο του οποίου καταλήγει μέσω καρφιού σε σώμα Σ μάζας $m = 2\text{ kg}$. Το σώμα Σ απέχει αρχικά απόσταση h από το έδαφος.

Αρχικά το σύστημα συγκρατείται ακίνητο και το νήμα είναι τεντωμένο.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί οπότε το σώμα Σ αρχίζει να κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση και ο δίσκος να

κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο έχοντας συνεχώς σε επαφή με το έδαφος το αυλάκι του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\text{ s}$ που το σώμα Σ φτάνει στο έδαφος, η ορμή του έχει μέτρο $p_1 = 24\text{ kg}\cdot\text{m/s}$.

Διαπιστώνεται ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του δίσκου, ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των δύο αντιδιαμετρικών σημείων της κατακόρυφης διαμέτρου του δίσκου είναι ίσος με 3. Να βρείτε:

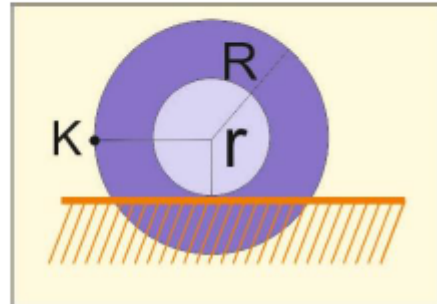


α. Την ακτίνα r του αυλακιού του δίσκου.

β. Την ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 .

γ. Το μήκος νήματος που ξετυλίγεται από το δίσκο στη διάρκεια του τελευταίου δευτερολέπτου της κίνησης του Σ .

δ. Ποια χρονική στιγμή το σημείο K της περιφέρειας του δίσκου και το οποίο απέχει απόσταση r από το έδαφος, όπως φαίνεται στο σχήμα, έχει επιτάχυνση που σχηματίζει γωνία 45° με το οριζόντιο δάπεδο; Πόσο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου K ;



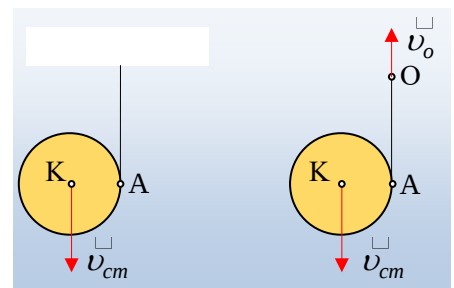
ε. Ποιο ποσοστό της μείωσης της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ μετατράπηκε σε κινητική του σώματος Σ το χρονικό διάστημα από 0 ως 3 s ;

στ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ ελάχιστα πριν φτάσει στο έδαφος;

ζ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του σώματος Σ ελάχιστα πριν φτάσει στο έδαφος;

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$.

7. Γύρω από έναν κύλινδρο ακτίνας $R=0,1\text{m}$ τυλίγουμε ένα νήμα, το άλλο άκρο του οποίου δένουμε στο ταβάνι. Αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει, όποτε έχουμε τη δημιουργία ενός γιο-γιο, το οποίο στρέφεται αριστερόστροφα, ενώ πέφτει κατακόρυφα και σε μια στιγμή το κέντρο K του κυλίνδρου, έχει ταχύτητα μέτρου $v_{cm}=2\text{m/s}$.



- i) Για την θέση αυτή να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα του σημείου A του κυλίνδρου, όπου αρχίζει να ξετυλίγεται το νήμα.

β) Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

γ) Η ταχύτητα του σημείου B , του αντιδιαμετρικού σημείου του A .

δ) Η επιτάχυνση του σημείου A .

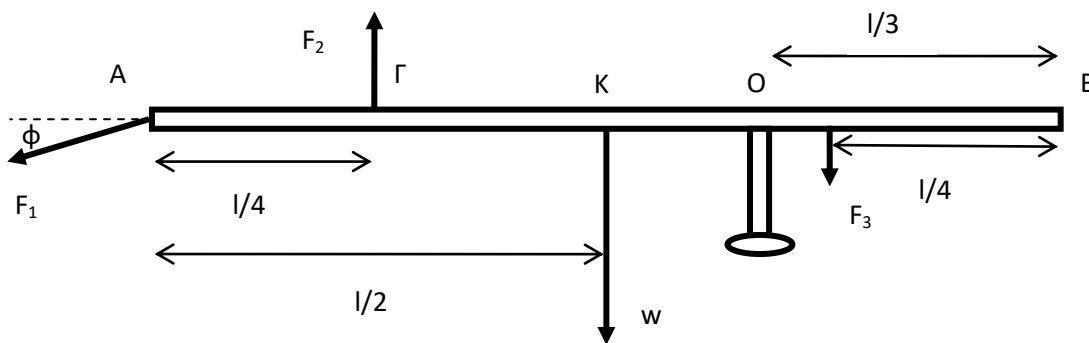
- ii) Ελευθερώνουμε το νήμα από το ταβάνι και πιάνουμε με το χέρι μας το άκρο O του νήματος. Αφήνουμε ξανά τον κύλινδρο να πέσει, ενώ τραβάμε προς τα πάνω το άκρο O του νήματος. Τη στιγμή που ξανά το κέντρο K του κυλίνδρου έχει ταχύτητα $v_{cm}=2\text{m/s}$, με φορά προς τα κάτω, έχει και κατακόρυφη επιτάχυνση $a_{cm}=4\text{m/s}^2$, επίσης με φορά προς τα κάτω, το άκρο O του νήματος έχει ταχύτητα προς τα πάνω με μέτρο $v_o=4\text{m/s}$ (η ταχύτητα που κινούμε το χέρι μας) και επιτάχυνση $a_o=8\text{m/s}^2$ με κατεύθυνση επίσης προς τα πάνω. Για τη στιγμή αυτή:

α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

β) Να υπολογισθεί η ταχύτητα και η κατακόρυφη επιτάχυνση του σημείου B .

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

8. Ομογενής ράβδος AB, μήκους $l=12\text{ m}$, βάρους $w=100\text{ N}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από το O.

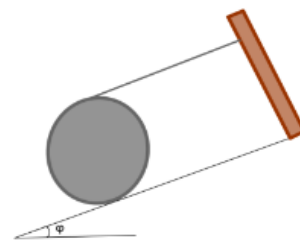


$$F_1=50\text{ N}, F_2=40\text{ N}, F_3=30\text{ N}, \phi=30^\circ.$$

$$\Sigma \tau^O = ?$$

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

9. Ο δίσκος ισορροπεί με τη βοήθεια ενός νήματος παράλληλου στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν το βάρος του δίσκου είναι $w=10\text{ N}$ και η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\phi=30^\circ$, να βρεθούν:

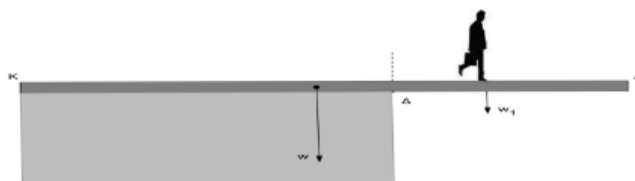


α) η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων που δέχεται ο δίσκος ως προς το κέντρο του K.

β) η δύναμη που δέχεται ο τροχός από το νήμα.

γ) η στατική τριβή στον δίσκο καθώς και το μέτρο της δύναμης που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στο δίσκο.

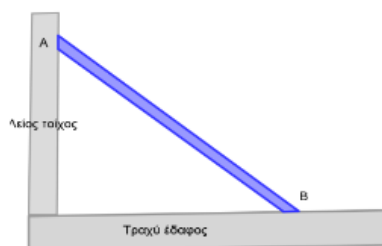
10. Μια ομογενής σανίδα ΚΛ μήκους $L=10\text{ m}$ και βάρους $W=1200\text{ N}$ τοποθετείται πάνω σε μια επιφάνεια ώστε το τμήμα ΔΛ μήκους $L=4\text{ m}$ να προεξέχει της επιφάνειας. Ένας άνθρωπος βάρους $w_1=800\text{ N}$ ξεκινάει από το άκρο Κ και κινείται πάνω στη σανίδα με κατεύθυνση προς το Λ.



α) Μέχρι ποιά απόσταση x από το σημείο Δ μπορεί να περπατήσει ώστε να μην ανατραπεί η σανίδα;

β) Πόσο είναι η μέτρο της αντίδρασης N εκείνη την στιγμή;

11. Μια ράβδος ομογενής AB μήκους L και βάρους $w=100\text{N}$ ισορροπεί όπως φαίνεται στο



σχήμα στηριζόμενη στο άκρο της A σε λείο τοίχο και στο άκρο της B σε τραχύ έδαφος.

Δίνεται ότι η ελάχιστη γωνία για την οποία η ράβδος δεν ολισθαίνει είναι $\varphi=45^\circ$ και ότι

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ζητείται:

α) Η κάθετη δύναμη που ασκεί το έδαφος στη ράβδο.

β) Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου-εδάφους καθώς και τη δύναμη που ασκεί ο λείος τοίχος στη ράβδο.

γ) Το μέτρο της δύναμης (αντίδρασης) του εδάφους στη ράβδο.

12. Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει βάρος $w_1=10\text{N}$ και μήκος $\ell=4\text{m}$. Το ένα της άκρο αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο και το άλλο της άκρο κρέμεται από κατακόρυφο



σχοινί με αποτέλεσμα να ισορροπεί οριζόντια.

α) Να βρεθεί η τάση του νήματος.

β) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

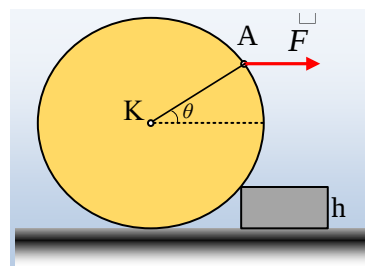
Τη χρονική στιγμή $t=0$, από το άκρο A ξεκινάει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο ένας κύλινδρος βάρους $w_2=10\text{N}$ με επιτάχυνση $a_{\text{cm}}=1\text{m/s}^2$.

Ζητείται:

γ) Η τάση του νήματος τη χρονική στιγμή $t=\sqrt{3}\text{ s}$.

δ) Η γωνιακή ταχύτητα και η θέση του κυλίνδρου, όταν η τάση του νήματος γίνει $T=10\text{N}$. (Δίνεται η ακτίνα του κυλίνδρου $R=0,1\text{m}$).

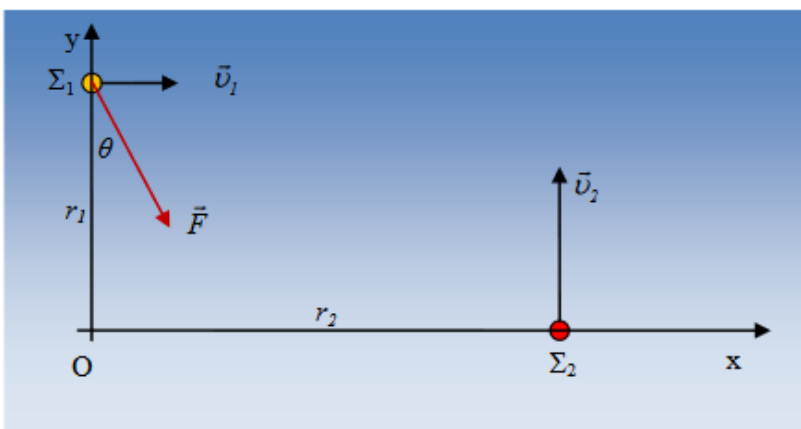
13. Ο ομογενής κύλινδρος του σχήματος, βάρους $w=100\text{N}$ και ακτίνας R , ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή με σκαλοπάτι ύψους $h=0,4R$. Σε μια στιγμή στο άκρο A μιας ακτίνας, η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία $\theta=30^\circ$, ασκούμε μέσω νήματος, μια οριζόντια δύναμη F , μέτρου $F=40\text{N}$, όπως στο σχήμα και βλέπουμε τον κύλινδρο να παραμένει ακίνητος.



- Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο και να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί το σκαλοπάτι να είναι λείο.
- Να υπολογίσετε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο από το σκαλοπάτι.
- Πόση δύναμη δέχεται ο κύλινδρος από το οριζόντιο επίπεδο;
- Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και σκαλοπατιού, για να εξασφαλίζεται η παραπάνω ισορροπία;

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ-ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

14. Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 κινούνται σε περιοχή χωρίς βαρυτικές επιδράσεις, πάνω στο επίπεδο xOy . Το Σ_1 κινείται παράλληλα στον άξονα Ox και το Σ_2 παράλληλα στον άξονα Oy , όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη θέση που τα βλέπουμε, ασκείται στο Σ_1 η (εξωτερική) δύναμη $\vec{F}$



μέτρου $|F| = 2\text{N}$, με $\theta = 30^\circ$. Το Σ_1 έχει μάζα $m_1 = 6\text{kg}$ και μέτρο ταχύτητας $v_1 = 2\text{m/s}$, ενώ το Σ_2 έχει μάζα $m_2 = 3\text{kg}$ και μέτρο ταχύτητας $v_2 = 4\text{m/s}$. Οι αποστάσεις που φαίνονται στο σχήμα, από την αρχή O του συστήματος των αξόνων είναι $r_1 = 1,5\text{m}$, $r_2 = 3\text{m}$. Τα διανύσματα των ταχυτήτων και η δύναμη ανήκουν στο επίπεδο xOy .

Υπολογίστε:

- Τη στροφορμή κάθε υλικού σημείου ως προς το O .
- Τη στροφορμή του συστήματος ως προς το σημείο O .
- Τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$ που δέχεται το Σ_1 εκείνη τη στιγμή, ως προς το O .
- Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος των υλικών σημείων.

15.

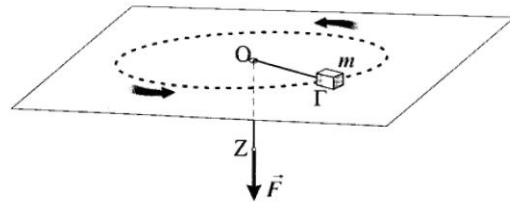
Το μικρό σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα $m = 0,2 \text{ kg}$, είναι δεμένο με αβαρές, μη εκτατό νήμα και περιστρέφεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση με συχνότητα $f_1 = \frac{8}{\pi} \text{ Hz}$ και ακτίνα $r_1 =$

$= 0,5 \text{ m}$. Το νήμα διέρχεται από μια τρύπα O του επιπέδου και μεταβάλλοντας την κατακόρυφη δύναμη που ασκούμε στο ελεύθερο άκρο του Z μπορούμε να μεταβάλλουμε την ακτίνα OG της κυκλικής τροχιάς του σώματος. Η μέγιστη τιμή της τάσης που μπορεί να ασκήσει το νήμα χωρίς να κοπεί ισούται με $T_{\max} = 400 \text{ N}$.

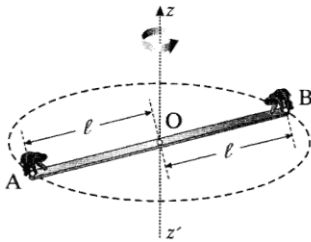
α) Να υπολογίσετε τη στροφορμή του μικρού σώματος κατά τον άξονα που διέρχεται από το O και είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής κίνησης.

β) Ελαττώνουμε το μήκος (OG) του νήματος κατά $0,1 \text{ m}$. Να υπολογίσετε το μέτρο της νέας γωνιακής ταχύτητας που θα αποκτήσει το σώμα.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ελάττωση που μπορεί να υποστεί το μήκος του νήματος OG .



16.



Η αβαρής ράβδος AB του σχήματος με μήκος $2\ell = 2 \text{ m}$ μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσο της O . Στα άκρα A και B της ράβδου υπάρχουν δύο πύθνηκοι, μάζας $m = 20 \text{ kg}$ ο καθένας, και η ράβδος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$. Κάποια στιγμή οι πύθνηκοι αρχίζουν να κινούνται ταυτόχρονα προς το μέσο O της ράβδου και διανύουν διάστημα $\ell/2$ ο καθένας. Να βρείτε:

α) τη νέα γωνιακή ταχύτητα της ράβδου,

β) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

γ) τη μέση ροπή της δύναμης που άσκησε ο κάθε πύθνηκος στον εαυτό του.