

ΑΣΚΗΣΗ 1

Λύση

Α. Είναι

$$P_{αρχ} = m \cdot v_1 \rightarrow P_{αρχ} = 6\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Β. Από τη γενικευμένη έκφραση του δεύτερου νόμου του Newton έχουμε $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$. Όμως η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το σώμα είναι η δύναμη $\vec{F}$, η οποία είναι σταθερή επομένως

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \rightarrow \Delta \vec{P} = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \rightarrow \vec{P}_{τελ} - \vec{P}_{αρχ} = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \rightarrow \vec{P}_{τελ} = \vec{P}_{αρχ} + \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \rightarrow \\ &\rightarrow \vec{P}_{τελ} = \vec{P}_{αρχ} + \vec{F} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι το διάνυσμα της τελικής ορμής του σώματος είναι το διανυσματικό άθροισμα της αρχικής του ορμής και του διανύσματος $\vec{F} \cdot \Delta t$ (το γινόμενο αυτό λέγεται ώθηση της δύναμης).

Έτσι και σύμφωνα με το διπλανό σχήμα

$$\begin{aligned} P_{τελ}^2 &= P_{αρχ}^2 + (F \cdot \Delta t)^2 \rightarrow \\ \rightarrow F &= \frac{\sqrt{P_{τελ}^2 - P_{αρχ}^2}}{\Delta t} \rightarrow F = 2\text{N} \end{aligned}$$

Γ. Η δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στην αρχική ταχύτητα $\vec{v}_1$, δεν είναι όμως κάθετη στην εκάστοτε ταχύτητα του σώματος. Πράγματι την χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$ η $\vec{F}$ σχηματίζει οξεία γωνία θ με την ορμή $\vec{P}_{τελ}$ του σώματος, με

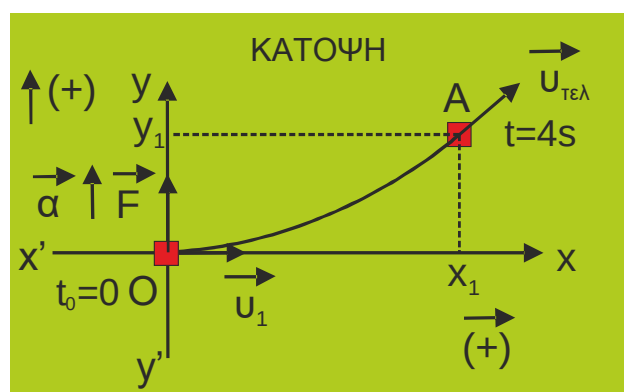
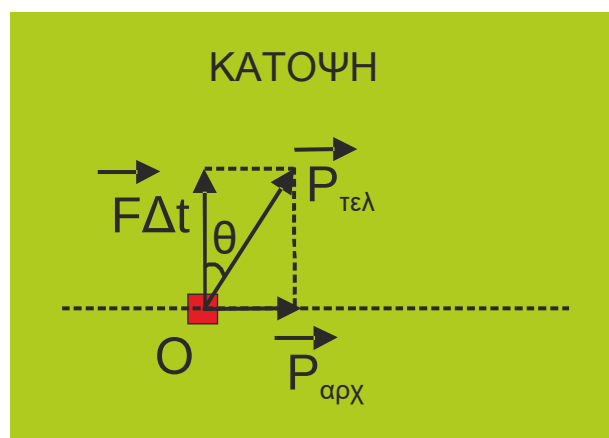
$$\varepsilon\phi\theta = \frac{P_{αρχ}}{F \cdot \Delta t} \rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{3}{4}. \text{ Για να εκτελεί όμως ένα σώμα ομαλή κυκλική κίνηση, πρέπει να δέχεται}$$

συνισταμένη δύναμη μόνιμα κάθετη στην ταχύτητά του. Έτσι ο ισχυρισμός είναι λάθος. (Φυσικά η κίνηση δεν θα μπορούσε να είναι ομαλή αφού το μέτρο της τελικής ορμής του σώματος είναι διαφορετικό από αυτό της αρχικής του ορμής).

Δ. Θεωρούμε σύστημα αξόνων $x'x$ και $y'y$ κάθετων μεταξύ τους, με κοινή αρχή το σημείο Ο. Το σώμα εκτελεί κίνηση, την οποία μελετάμε ως επαλληλία δύο κινήσεων:

μιας ευθύγραμμης ομαλής στον άξονα $x'x$ αφού $\Sigma \vec{F}_x = 0$

με ταχύτητα $v_x = v_1$



και μιας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης στον άξονα γ'γ με επιτάχυνση μέτρου

$$\alpha = \frac{\Sigma F_y}{m} \rightarrow \alpha = \frac{F}{m} \rightarrow \alpha = 1 \frac{m}{s^2}. \text{ Έτσι την χρονική στιγμή } t = 4s \text{ το σώμα θα βρίσκεται στο σημείο A και θα}$$

έχει μετατοπιστεί στον άξονα x'x κατά $x_1 = v_1 \cdot (t - t_0) \xrightarrow{t_0=0} x_1 = 12m$ και στον άξονα γ'γ κατά

$$y_1 = v_{0,y} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha \cdot (t - t_0)^2 \xrightarrow{v_{0,y}=0, t_0=0} y_1 = 8m$$

Έτσι το σώμα θα απέχει εκείνη τη στιγμή από το σημείο O απόσταση $(OA) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \rightarrow (OA) = \sqrt{208} m$

Σχόλιο

Η κίνηση του σώματος είναι όμοια με την οριζόντια βολή, όπου εδώ το ρόλο του βάρους παίζει η σταθερή δύναμη $\vec{F}$. Η τροχιά του σώματος θα είναι παραβολική με εξίσωση που προκύπτει από τις

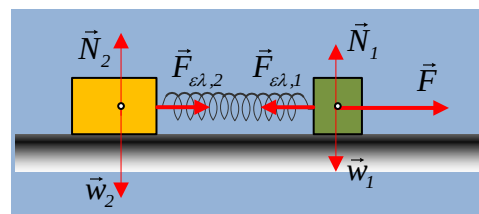
$$x = v_1 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_1} \quad (1) \text{ και}$$

$$y = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \xrightarrow{(1)} y = \frac{1}{2} \alpha \cdot \left(\frac{x}{v_1}\right)^2 \rightarrow y = \frac{1}{2} \alpha \cdot \left(\frac{x}{v_1}\right)^2 \rightarrow y = \frac{x^2}{18} \text{ (S.I.)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Απάντηση:

Στη διάρκεια της κίνησης, ασκούνται στα σώματα οι δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, όπου οι δυνάμεις του ελατηρίου είναι εσωτερικές για το σύστημα των δύο σωμάτων, ενώ η συνισταμένη των βαρών και των κάθετων αντιδράσεων του επιπέδου N (δυνάμεις εξωτερικές) έχουν (ανά δύο) μηδενική συνισταμένη. Έτσι η μόνη εξωτερική δύναμη στο σύστημα, είναι η δύναμη F.



i) Τη στιγμή $t=0$ που ασκείται η δύναμη F, το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, οπότε:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{dP_1}{dt} = F = 40 kgm / s^2.$$

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \Sigma \vec{F} = 0.$$

ii) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα των δύο σωμάτων, παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{P}_{ολ}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{εξ} = \vec{F}$$

Αλλά αφού η δύναμη είναι σταθερή, τότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος και με τη μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής και η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta t} = F \Rightarrow \frac{P_{o\lambda} - 0}{t_1 - 0} = F \rightarrow$$

$$P_{o\lambda,1} = F \cdot t_1 = 40 \cdot 2 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s} = 80 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}$$

iii) Η ορμή του Α σώματος είναι ίση:

$$P_1 = m_1 v_1 = 10 \cdot 1,6 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s} = 16 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}$$

Ενώ η συνολική ορμή που υπολογίστηκε παραπάνω γράφεται:

$$P_{o\lambda,t1} = P_1 + P_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \rightarrow$$

$$m_2 v_2 = P_{o\lambda,t1} - m_1 v_1 = 80 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s} - 16 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s} = 64 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}$$

$$(\text{από όπου βρίσκουμε ότι } v_2 = \frac{64}{m_2} = \frac{64}{20} \text{ m} / \text{s} = 3,2 \text{ m} / \text{s})$$

Εξάλλου για το ρυθμό μεταβολής της ορμής κάθε σώματος έχουμε:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \Sigma \vec{F} \Rightarrow \frac{dP_1}{dt} = F - F_{ελ,1} = F - k \cdot \Delta \ell = (40 - 40 \cdot 0,6) \text{ kgm} / \text{s}^2 = 16 \text{ kgm} / \text{s}^2$$

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \Sigma \vec{F} \Rightarrow \frac{dP_2}{dt} = F_{ελ,2} = k \cdot \Delta \ell = 40 \cdot 0,6 \text{ kgm} / \text{s}^2 = 24 \text{ kgm} / \text{s}^2.$$

iv) Η ολική ενέργεια του συστήματος τη στιγμή t_1 είναι ίση:

$$E_{o\lambda} = K_1 + K_2 + U_{ελ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 \rightarrow$$

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2} 10 \cdot 1,6^2 \text{ J} + \frac{1}{2} 20 \cdot 3,2^2 \text{ J} + \frac{1}{2} 40 \cdot 0,6^2 \text{ J} = 122,4 \text{ J}$$

Η ενέργεια αυτή μεταφέρθηκε στο σύστημα, μέσω του έργου της δύναμης F, μιας σταθερής δύναμης που μετατοπίζει κατά x το σώμα στο οποίο ασκείται, κατά την κατεύθυνσή της, οπότε:

$$W = F \cdot x \rightarrow x = \frac{W}{F} = \frac{122,4}{40} \text{ m} = 3,06 \text{ m}$$