

Άσκηση 8 Φύλλο Σύν ΕΠΑΝ. ΣΕΤ. Α

$$\alpha) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\vec{a}, \vec{b}) \xrightarrow{\text{υπόθεση}} \cos 2\varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

άρα η γωνία για διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι 2φ
 αφού $0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2\varphi < \pi$. και επειδή
 $2\varphi \neq 0$ και $2\varphi \neq \pi$ τα διανύσματα δεν
 είναι κολλημένα.

$$\beta) \vec{v} = \frac{1}{2\cos\varphi} (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow |\vec{v}|^2 = \frac{1}{4\cos^2\varphi} (\vec{a} + \vec{b})^2 \Rightarrow$$

$$|\vec{v}|^2 = \frac{1}{4\cos^2\varphi} (\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2) \Rightarrow |\vec{v}|^2 = \frac{|\vec{a}|^2 + 2\cos 2\varphi + |\vec{b}|^2}{4\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{1 + 2\cos 2\varphi + 1}{4\cos^2\varphi} = \frac{2 + 2\cos 2\varphi}{4\cos^2\varphi} = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2\cos^2\varphi} = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2\cos^2\varphi}$$

$$|\vec{v}|^2 = \frac{2\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi} = 1 \Rightarrow \boxed{|\vec{v}| = 1}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{2\sin\varphi} (\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \frac{1}{4\sin^2\varphi} (\vec{a} - \vec{b})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}|^2 = \frac{\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}{4\sin^2\varphi} = \frac{|\vec{a}|^2 - 2\cos 2\varphi + |\vec{b}|^2}{4\sin^2\varphi} = \frac{2 - 2\cos 2\varphi}{4\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{2 - 2\cos 2\varphi}{4np^2\varphi} = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2np^2\varphi} = \frac{1 - (\cancel{2}1 - 2\sin^2\varphi)}{2np^2\varphi}$$

$$= \frac{1 - 1 + 2\sin^2\varphi}{2np^2\varphi} \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \frac{2\sin^2\varphi}{2np^2\varphi} = 1 \Rightarrow |\vec{u}| = 1$$

$$\text{Άρα } |\vec{v}| = |\vec{u}|$$

$$\gamma) \text{ Άρα } \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \text{ παρατηρούμε:}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2\cos\varphi} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \frac{1}{2np\varphi} (\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{1}{4\cos\varphi np\varphi} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{a^2 - b^2}{4\cos\varphi np\varphi}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{4\cos\varphi np\varphi} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{1 - 1}{4\cos\varphi np\varphi} = 0$$

$$\text{Άρα } \vec{v} \perp \vec{u}.$$