

Α64
2) α)
i)

$$x^2 + y^2 + 2(y - x - 1) - (x + y + 2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2y - 2x - 2 - x - y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + (-2-1)x + (2-1)y - 2-2 = 0 \quad \text{Αν } A = (-2-1), B = (2-1) \\ \Gamma = (-2-2)$$

Ζούμε αν είναι της μορφής:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad (\text{γεν. μορφή εφέδωτος κύκλου}).$$

Δρζει να δείψουμε ότι $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ (αρκούν οι συνθήκες)

$$\text{Έχουμε } (-2-1)^2 + (2-1)^2 - 4(-2-2) = 2^2 + 2x + 1 + 2^2 - 2x + 1 + 4x + 8$$

$$= 2x^2 + 4x + 2 + 8 = 2(x^2 + 2x + 1) + 8 = 2(x+1)^2 + 8 > 0 \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. άρα περιγράφει κύκλο ορισμένο

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$ii) \text{ Ζούμε κέντρο } K = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{2+1}{2}, -\frac{(2-1)}{2}\right)$$

$$\text{Εξίσωση ευθείας } \epsilon_1: y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{μην } k = \dots$$

$$\text{από } \epsilon: x + y + 2 = 0 \text{ έχουμε ότι } \lambda_\epsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{1} = -1$$

Αρκούν οι συνθήκες για ϵ_1 οπότε $k = \lambda_\epsilon = -1$ άρα $\epsilon // \epsilon_1$ και οπότε

$$y_0 = -\frac{(2-1)}{2}, x_0 = \frac{2+1}{2} \text{ έχουμε:}$$

②

$$y + \frac{\lambda-1}{2} = -1 \left(x - \frac{\lambda+1}{2} \right) \Rightarrow 2y + \lambda - 1 = -2x + \lambda + 1 \Rightarrow$$

$$2y + \lambda - 1 = -2x + \lambda + 1 \Rightarrow 2y = -2x + \lambda + 1 - \lambda + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = -2x + 2 \Rightarrow y = \frac{-2x + 2}{2} \Rightarrow \boxed{y = -x + 1} \quad (E_2)$$

Δρα τα κέρια & βρεύσεις των 600 € με ϵ_1/ϵ_2

ii) η δαπάνη των κούβων δίνει δύο τον τύπο:

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \text{ Δρα από ερώτηση (1) έχουμε}$$

$$\text{ότι } \rho = \frac{\sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8}}{2} \text{ Δρα θέλω να ισχύει:}$$

$$\frac{\sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8} \right)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$

$$2(\lambda+1)^2 + 8 = 4 \cdot 2 \Rightarrow 2(\lambda+1)^2 + 8 = 8 \Rightarrow 2(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda+1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

ii) Από εξίσωση $x^2 - 3y + 6 = 0$ βγαίνει ότι

$$d(k, \epsilon) = \rho \Rightarrow \frac{\left| 4 \frac{\lambda+1}{2} - 3 \left(-\frac{\lambda-1}{2} \right) + 6 \right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left| \frac{2(\lambda+1) + \frac{3(\lambda-1)}{2} + 6}{\sqrt{25}} \right|}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8}}{2} \Rightarrow$$

(3)

$$\frac{\left| \frac{4(\lambda+1) + 3(\lambda-1) + 12}{2} \right|}{5} = \frac{\sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\left| \frac{4\lambda + 4 + 3\lambda - 3 + 12}{2} \right|}{5} = \frac{\sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8}}{2} \Rightarrow$$

$$|7\lambda + 13| = 5\sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8} \Rightarrow \left(-|7\lambda + 13| \right)^2 = \left(5\sqrt{2(\lambda+1)^2 + 8} \right)^2 \Rightarrow$$

$$(7\lambda + 13)^2 = 25(2(\lambda+1)^2 + 8) \Rightarrow 49\lambda^2 + 182\lambda + 169 = 50\lambda^2 + 100\lambda + 200$$

$$49\lambda^2 + 182\lambda + 169 - 50\lambda^2 - 100\lambda - 200 = 0 \Rightarrow$$

$$\therefore \lambda^2 + 82\lambda + 81 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + -82\lambda + 81 = 0$$

$$\Delta = 82^2 - 4 \cdot 81 = 6724 - 324 = 6400$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{82 \pm 80}{2} \begin{cases} \rightarrow \lambda_1 = \frac{162}{2} = 81 \\ \rightarrow \lambda_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{array}{l} \text{Αγα-} \\ \text{λ} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1: x + \mu y + 1 = 0 \\ \varepsilon_2: 2\mu x + 2y + 2 = 0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Λύση
Αφού θεωρούμε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ τότε $\Delta_{\varepsilon_1} = \Delta_{\varepsilon_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\mu} = -\mu \Rightarrow (-1)\frac{1}{\mu} = (-\mu)/(-\mu) \Rightarrow 1 = \mu^2 \Rightarrow \mu = \pm 1$$

α) άρα για $\mu = 1$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1: x + y + 1 = 0 \\ 2x + 2y + 2 = 0 \end{array}$$

β) για $\mu = -1$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1: x - y + 1 = 0 \\ \varepsilon_2: -2x + 2y + 2 = 0 \end{array}$$

Η απόσταση γίνεται $\Delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2}$ άρα για τις

περιπτώσεις που το $\mu = 1$ έχουμε αποδείξω:

κάθε ευθεία της ε_1 θα απέχει το ίδιο από την

ε_2 αφού $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ άρα πρέπει να βρω ένα από

τα σημεία της ε_1 και να βρω την απόστασή

του από την ε_2 έστω αν $x = 0$ τότε

το $M(0, -1)$ ανήκει στην ε_1
 $0 - y + 1 = 0 \Rightarrow -y = -1 \Rightarrow y = 1$ άρα

Λογ $d(M, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

(5)

$$\frac{|0+2+\lambda|}{\sqrt{4+4}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|2+\lambda|}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |2+\lambda| = 2\sqrt{16}$$

$$|2+\lambda| = 2 \cdot 4 \Rightarrow |2+\lambda| = 8 \begin{cases} 2+\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 6 \\ 2+\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = -10 \end{cases}$$

Αρα οι ευθείες που είναι οι:

$$\varepsilon_1: x+y+1=0$$

$$\varepsilon_2: 2x+2y-6=0$$

$$\varepsilon_2: 2x+2y+10=0$$

Αν τώρα $\mu = -1$ ομοία για $x=0$ είναι ε_1 ίδιες

Ομοία $M = (0, 2)$ άρα $d(M, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2}$

$$\frac{|0+2+\lambda|}{\sqrt{4+4}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |2+\lambda| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 8 \Rightarrow$$

$$2+\lambda = 8 \begin{cases} \lambda = 6 \\ 2+\lambda = -8 \end{cases} \lambda = -10$$

$$2+\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = -10$$

άρα οι ευθείες που έχουμε για περιπτώσεις θα είναι:

$$\varepsilon_1: x-y+1=0$$

$$\varepsilon_2: \begin{cases} -2x+2y+6=0 \\ -2x+2y-10=0 \end{cases}$$