

Επιμέλεια Ζιάννη Φ. ΠΕ03, Msc

Εμβαδά και εμβαδά ομοίων σχημάτων

Λυμένες επαναληπτικές ασκήσεις στα Εμβαδά

1. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB κέντρου O θεωρούμε σημείο του Δ. Η χορδή AB τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου OB στο Γ. Να αποδείξετε :

A) Τα τρίγωνα AΔB και OΓB είναι όμοια

B) $(AΔB)=4(OΓB)$

Λύση

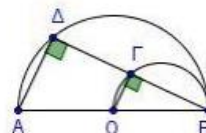
α) Τα τρίγωνα AΔB και OΓB είναι όμοια γιατί έχουν

$\hat{A}\hat{D}B = \hat{B}\hat{\Gamma}O = 90^\circ$ (εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο) και $\hat{B}$ γωνία κοινή.

β) Ο λόγος ομοιότητας των ομοίων τριγώνων AΔB και BOΓ είναι

$\frac{BO}{AB} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}$ οπότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι

$$\frac{(O\Gamma B)}{(A\Delta B)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(O\Gamma B)}{(A\Delta B)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (A\Delta B) = 4(O\Gamma B)$$



(Πηγή: [askisopolis](http://askisopolis.gr))

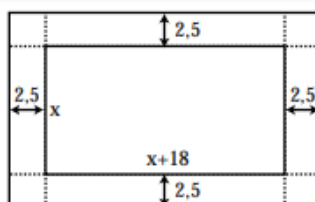
Από το σχολικό βιβλίο:

1. Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος είναι κατά 18 m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5 m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονές του 695 m². Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.

Λύση

. Αν το πλάτος του οικοπέδου είναι x m, το μήκος του θα είναι (x+18)m. Η δενδροστοιχία που περιβάλλει το οικόπεδο αποτελείται:

i) Από δύο ορθογώνια με διαστάσεις (x+18)m και 2,5m και συνολικό εμβαδόν $2(x+18) \cdot 2,5 = 5(x+18) \text{ m}^2$.



ii) Από δύο άλλα ορθογώνια με διαστάσεις x m και 2,5m και συνολικό εμβαδόν $2 \cdot x \cdot 2,5 = 5x \text{ m}^2$.

iii) Από τέσσερα τετράγωνα πλευράς 2,5 m και συνολικό εμβαδόν $4 \cdot (2,5)^2 = 25 \text{ m}^2$.

Επειδή το άθροισμα των εμβαδών ισούται με 695m² έχουμε την εξίσωση $5(x+18) + 5x + 25 = 695$ ή $10x = 580$ ή $x = 58$.

Αρα το πλάτος είναι 58m και το μήκος $58 + 18 = 76 \text{ m}$.

2. Αν $AB\Gamma\Delta$ και $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος πλευράς α και τετράγωνο πλευράς α αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma\Delta) \leq (K\Lambda MN)$.

Λύση

Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma = \delta_1$ και $B\Delta = \delta_2$ του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$. Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα, το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο, οπότε έχουμε:

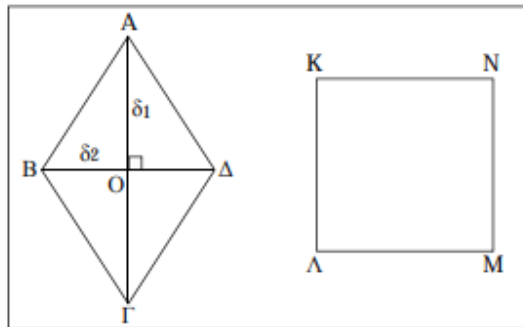
$$AB^2 = AO^2 + BO^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2^2}{4} = \frac{1}{4}(\delta_1^2 + \delta_2^2) \quad (1).$$

Είναι όμως γνωστό ότι: $x^2 + y^2 \geq 2xy$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, οπότε από την (1) προκύπτει:

$$\alpha^2 \geq \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \delta_1 \delta_2 = \frac{\delta_1 \delta_2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (K\Lambda MN) \geq (AB\Gamma\Delta).$$

Προφανώς το "=" ισχύει όταν $\delta_1 = \delta_2$, δηλαδή όταν ο ρόμβος γίνεται τελικά τετράγωνο.



3. Δύο τετράγωνα $AB\Gamma\Delta$ και ΔEZH έχουν κοινή την κορυφή Δ και εμβαδόν 36 το καθένα. Αν οι πλευρές $B\Gamma$ και EZ έχουν κοινό μέσο M , να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος $ABMZH\Delta$.

Λύση

Κάθε τετράγωνο έχει πλευρά μήκους 6μ.μ. Είναι:

$$(ABMZH\Delta) = (AB\Gamma\Delta) + (\Delta EZH) - (\Delta EM\Gamma) =$$

$$= 36 + 36 - 2(\Delta EM) =$$

$$= 72 - 2 \cdot \frac{1}{2} \Delta E \cdot EM =$$

$$= 72 - 6 \cdot 3 = 72 - 18 = 54.$$

