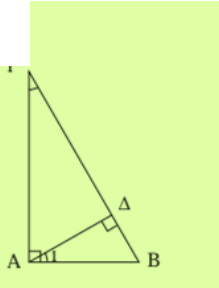


Μετρικές σχέσεις σε ένα τρίγωνο

Σχήμα 1



Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. (σχ. 1) Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$AB^2 = BG \cdot BA \text{ και } AG^2 = BG \cdot GA$$

. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των

προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα. $\frac{AB}{AG} = \frac{BA}{GA}$

. Πυθαγόρειο θεώρημα: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

$$AB^2 + AG^2 = BG^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

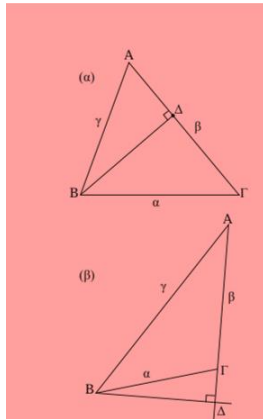
. Αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος: Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει $AB^2 + AG^2 = BG^2$, τότε $\hat{A} = 90^\circ$

. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα $AD^2 = BD \cdot DC$

Γενίκευση Πυθαγορείου θεωρήματος

Θεώρημα 1

(Σχ. 2)



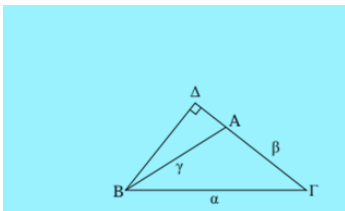
Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.2) είναι π.χ. $\hat{A} < 90^\circ$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AD$$

Θεώρημα 2

(Σχ. 3)



Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την

προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{A} > 90^\circ$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot AD$.

Πόρισμα

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- i) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 90^\circ$,
- ii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 90^\circ$,
- iii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^\circ$.

Σύμφωνα με το πόρισμα αυτό και επειδή σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη γωνία, συγκρίνοντας το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων πλευρών του, διαπιστώνουμε αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.

NOMOS TΩN ΣΥΝΗΜΙΤΩΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \cos A$.