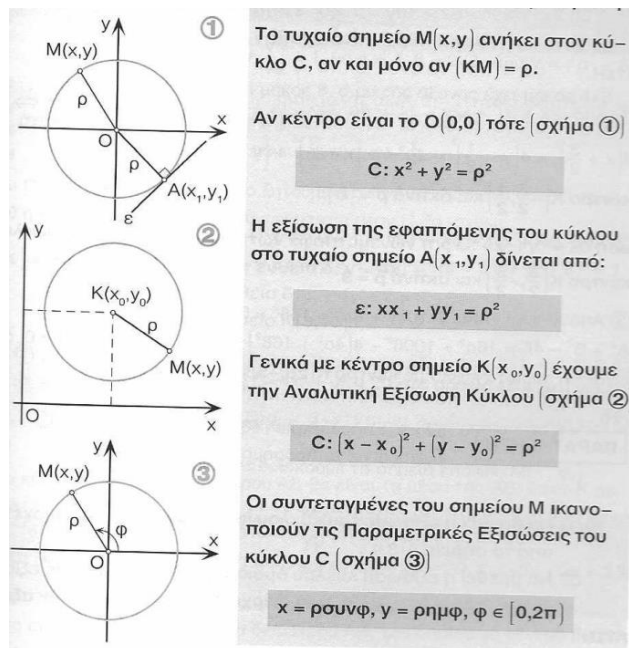
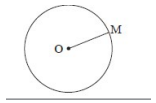


ΕΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Όπως έχουμε αναφέρει, γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

Επομένως:

- ο **κύκλος** είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.



ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής:

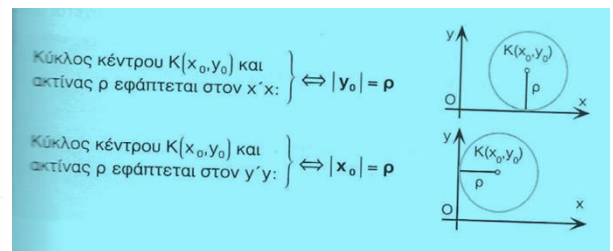
$$C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0, \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

και αντίστροφα κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει κύκλο

$$\text{κέντρου } K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ και ακτίνας } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}, \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**.

Οι κατακόρυφες εφαπτόμενες του κύκλου κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας ρ δίνονται από τον τύπο: **$\varepsilon: x = x_0 \pm \rho$**

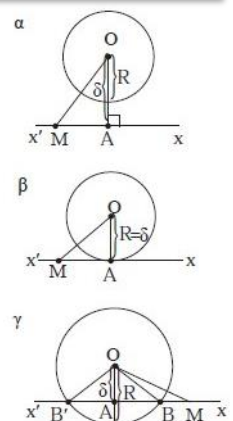


Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Θεωρούμε έναν κύκλο (O, R) μια ευθεία $x'x$ και την απόσταση $\delta = OA$ του κέντρου O από την $x'x$ (σχ.1)

- Αν $\delta > R$, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
- Αν $\delta = R$, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.
- Αν $\delta < R$, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.

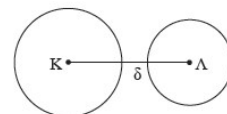
Σχήμα 1



Σχετικές θέσεις δυο κύκλων

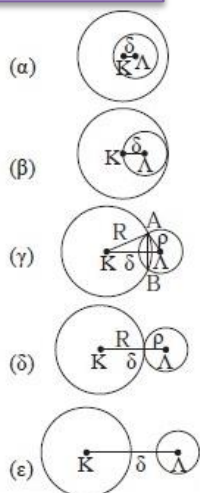
Σχήμα 2

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται **διάκεντρος** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ (σχ. 2).



Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Σχήμα 3



• Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

- (i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$ (σχ.3α).
- (ii) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$ (σχ.3β).

• Εφαπτόμενοι κύκλοι

- (i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$ (σχ.3β).

- (ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$ (σχ.3δ). Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται σημείο επαφής και είναι σημείο της διακέντρου.

• Τεμνόμενοι κύκλοι

Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$ (σχ.3γ). Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται κοινή χορδή των δύο κύκλων.

• Θεώρημα

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

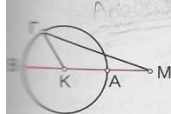
ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΚΥΚΛΩΝ - ΚΟΙΝΕΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (K, \rho_1)$, $C_2: (L, \rho_2)$ και έστω $\rho_1 > \rho_2$. Τότε έχουμε τις:

- ① Ο C_2 βρίσκεται **εκτός** του C_1 .
Τότε υπάρχουν **4 κοινές**
εφαπτόμενες και αυτό όταν:
 $(KL) > \rho_1 + \rho_2$
- ② Ο C_2 **εφάπτεται εξωτερικά** στον C_1 .
Τότε υπάρχουν **3 κοινές**
εφαπτόμενες και αυτό όταν:
 $(KL) = \rho_1 + \rho_2$
- ③ Ο C_2 **τέμνει** τον C_1 .
Τότε υπάρχουν **2 κοινές**
εφαπτόμενες και αυτό όταν:
 $\rho_1 - \rho_2 < (KL) < \rho_1 + \rho_2$
- ④ Ο C_2 **εφάπτεται εσωτερικά** στον C_1 .
Τότε υπάρχουν **1 κοινή**
εφαπτόμενη και αυτό όταν:
 $(KL) = \rho_1 - \rho_2$
- ⑤ Ο C_2 βρίσκεται **εντός** του C_1 .
Τότε **δεν υπάρχουν κοινές**
εφαπτόμενες και αυτό όταν:
 $(KL) < \rho_1 - \rho_2$

ΕΛΑΧΙΣΤΗ - ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΚΥΚΛΟ

Δοθείς κύκλος κέντρου K και εξωτερικό του κύκλου σημείο M , το πιο κοντινό σημείο A και το πιο μακρινό σημείο B στο M , βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου K και το σημείο M .



Στο τρίγωνο MKG η τριγωνική ιδιότητα δίνει:

$$MG < KG + KM = KB + KM = MB, \text{ άρα } MG < MB$$

$$MG > KM - KG = KM - KA = MA, \text{ άρα } MG > MA$$

Τα παραπάνω ισχύουν και για εσωτερικό σημείο του C