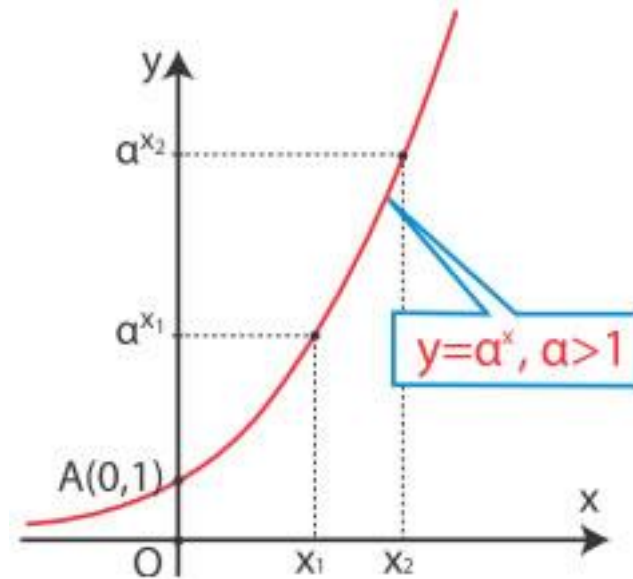


Εκθετική-Λογαριθμική συνάρτηση

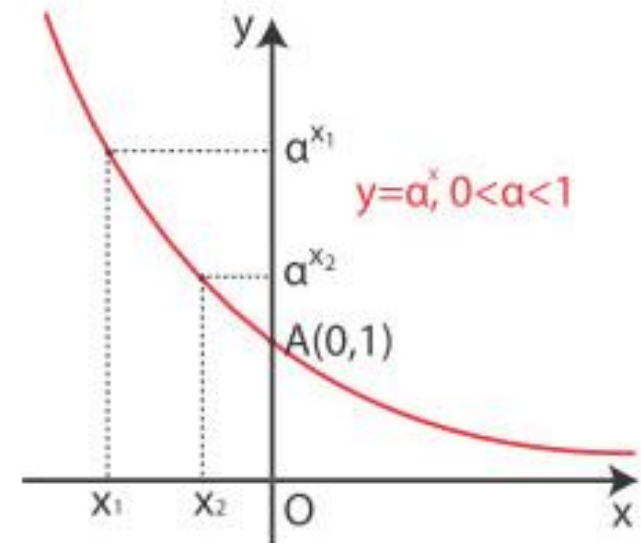
Η εκθετική $f(x)=a^x$, $a>1$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$
- Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x .



Η εκθετική $f(x)=a^x$, $0<a<1$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} > a^{x_2}$
- Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα των x .



Εκθετικές Εξισώσεις

Επίλυση εκθετικών εξισώσεων

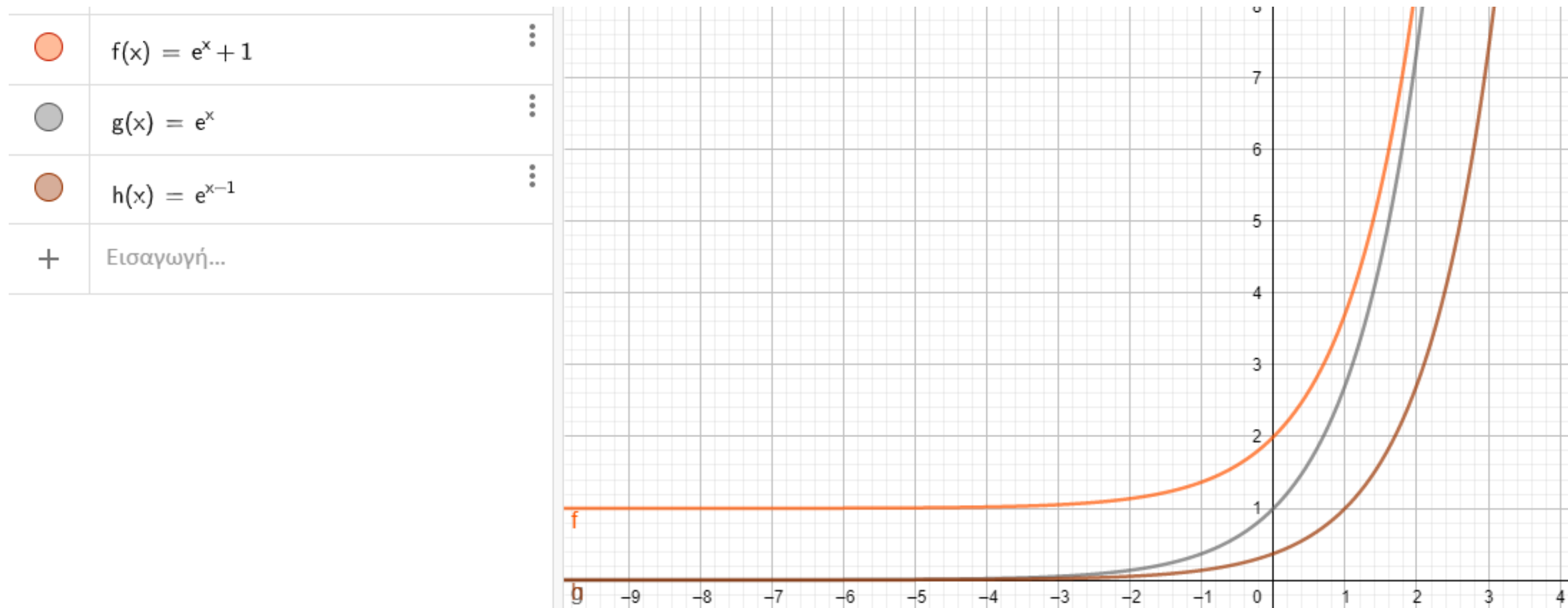
- Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης
- $f(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$,
- αν $x_1 \neq x_2$, τότε $a^{x_1} \neq a^{x_2}$
οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:

- αν $a^{x_1} = a^{x_2}$, τότε $x_1 = x_2$.
- ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την επίλυση εξισώσεων, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στον εκθέτη. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **εκθετικές εξισώσεις**.

Κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της e^x



Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το a

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο των γωνιών xOy και $x'Oy'$

- Έστω $a > 0$ και $a \neq 1$. Για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο $\log_a x$. Επομένως, αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log_a x$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_a x$

-

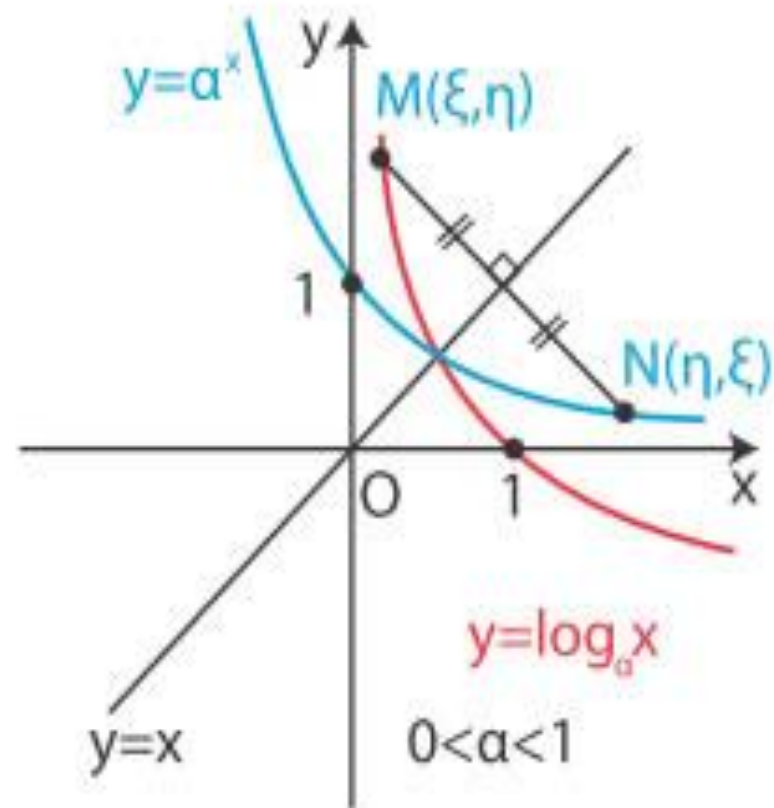
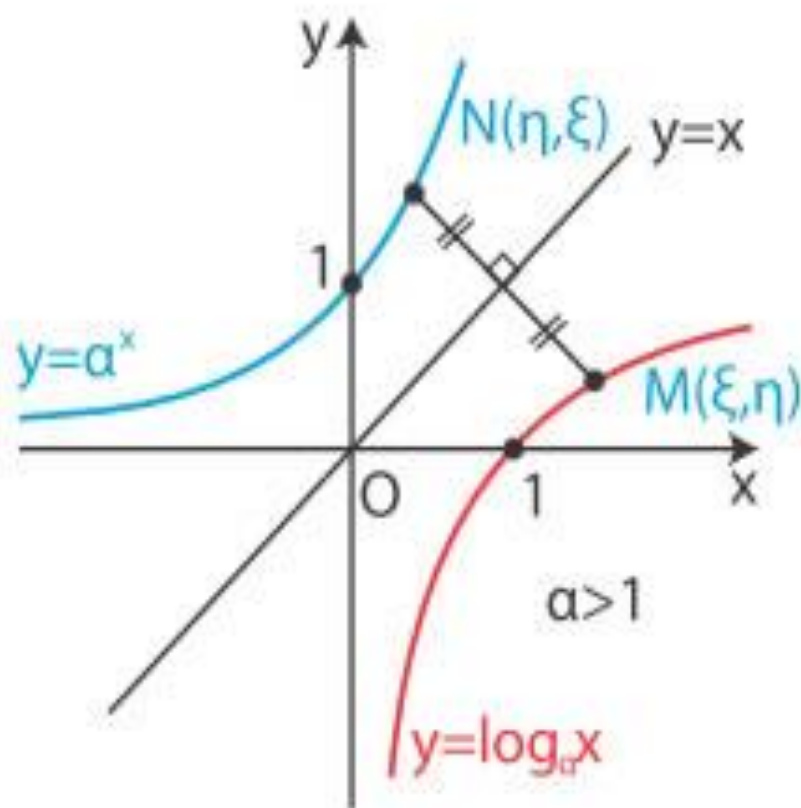
- Ας θεωρήσουμε, τώρα, την λογαριθμική συνάρτηση

$$f(x) = \log_a x \text{ και}$$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x,$$

- αν το $M(\xi, \eta) \in C_f$ τότε το $N(\eta, \xi)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $y = a^x$ και αντίστροφα.

Συμμετρία των $y = \log_a x$ και $y = a^x$



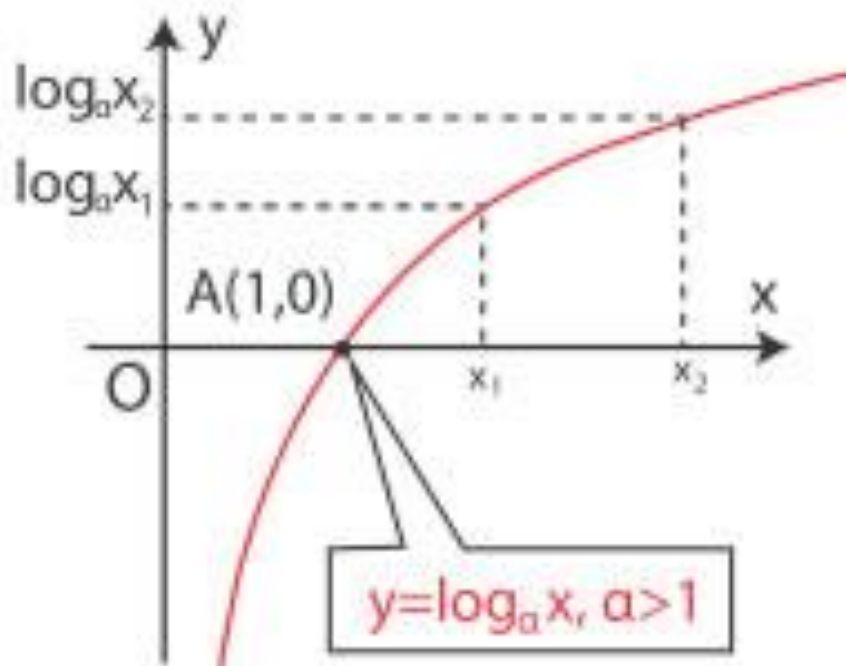
Αν $a > 1$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$:

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι
- αν $x_1 < x_2$, τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2$

- **$(\log_a x < 0, \text{ αν } 0 < x < 1)$ και $(\log_a x > 0, \text{ αν } x > 1)$**

- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy' .

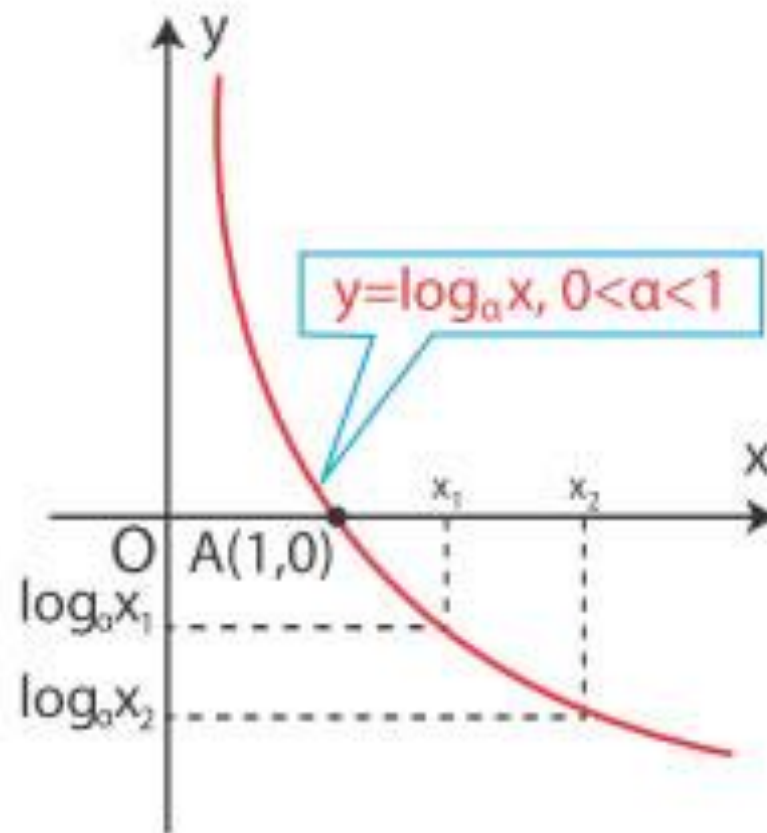
Γραφική παράσταση της $\log_{\alpha}x, \alpha>1$



Αν $0 < \alpha < 1$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)$
 $= \log_{\alpha} x$:

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
 - Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
 - Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι
 - αν $x_1 < x_2$, τότε
 - $\log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2$
- απ' όπου προκύπτει ότι:
 - $(\log_{\alpha} x > 0, \text{ αν } 0 < x < 1)$ και $(\log_{\alpha} x < 0, \text{ αν } x > 1)$
 - Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα Oy .

Γραφική παράσταση της $\log_{\alpha} x$, $0 < \alpha < 1$



Επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων

- Τέλος, από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:
 - αν $x_1 \neq x_2$, τότε $\log_{\alpha} x_1 \neq \log_{\alpha} x_2$
 - οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:
 - αν $\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2$, τότε $x_1 = x_2$
 - Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:
 - **$\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$**
- $\log_2(x^2 - 1) = 3$
 - $\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2 2^3$
 - $\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2 8$
 - $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 8$
 - $\Leftrightarrow x^2 = 9$
 - $\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3$