Μορφές εξισώσεων με απόλυτα

Αν συμβολίσω με Α(x) και Β(x) τις παραστάσεις που έχουν μεταβλητή το x έχουμε τις ακόλουθες μορφές:

1. Α(x)=θ, θ>0 και η Α(x) διατηρεί πρόσημο.

2. Α(x)=θ, θ>0 |Α(x)|=θ$⟺$ Α(x)=θ ή Α(x)=-θ.

3. |Α(x)|= Α(x). Επειδή ισχύει |α|=α$⇔$α$\geq $0 $⇔$Α(x)$\geq $0.

4. |Α(x)|= -Α(x). Επειδή ισχύει |α|=-α$⇔$α$\leq $0 $⇔$Α(x)$\leq $0.

5. |Α(x)|= |Β(x)|$⟺$ Α(x)=Β(x) ή |Α(x)|=-|Β(x)|

6. |Α(x)|=Β(x) βρίσκουμε το πρόσημο του Α(x) και λύνουμε κατά περίπτωση.

7. x2=θ2 $⇔$|x|=θ $⇔$x=θ ή x=-θ.

8. |Α(x)|+ |Β(x)|=0 $⇔$ Α(x)=0 και Β(x)=0

Ασκήσεις

**1. Να λυθεί η εξίσωση** $\left|4x^{2}-4x+1\right|=9+4x^{2}.$

**2. Να λυθεί η εξίσωση:** $\left|x+4\right|=1$

**3. Να λυθεί η εξίσωση:** $\left|2x-1\right|=2x-1 και \left|3x-2\right|=2-3x$

**4. Να λυθεί η εξίσωση:** $|3x-1|=|x-5|$

**5. Nα λυθεί η εξίσωση: |x-1|=3x-5**

**6. Να λυθεί η εξίσωση:** $\left|x-2\right|+\left|x^{2}-2x\right|=0$

**ΛΥΣΕΙΣ**

1.

$$\begin{array}{c}\left|4x^{2}-4x+1\right|=9+4x^{2}\left⟨=\right⟩\\\left|\left(2x-1\right)^{2}\right|=9+4x^{2}\left⟨=\right⟩\\\left(2x-1\right)^{2}=9+4x^{2}\left⟨=\right⟩\\x=-2\end{array}$$

2. $\begin{array}{c}\left|x+4\right|=1⇔\left(x+4=1 ή x+4=-1\right)\\⟺\left(x=-3 \dot{n }x=-5\right)\end{array}$

3. $\begin{array}{c}|2x-1|=2x-1⇔2x-1\geq 0⇔x\geq \frac{1}{2}\\\left|3x-2\right|=2-3x⇔3x-2\leq 0⇔x\leq \frac{2}{3}\end{array}$

4.

$$\begin{array}{c}\left|3x-1\right|=\left|x-5\right|\left⟨=\right⟩\\(3x-1=x-5 ή \\3x-1=-\left(x-5\right))\\\left⟨=\right⟩\\x=-2 ή x=\frac{3}{2}\\\end{array}$$

5. Βρίσκουμε το πρόσημο του x-1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | -$\infty $ |  +$\infty $ |
| x-1 | -10 |  + |
|  |  |  |

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$\begin{array}{c}x\leq 1⇔x-1\leq 0 ⟺-\left(x-1\right)=3x-5⇔x=\frac{3}{2} απορρίπτεται \\x>1<⇔x-1>0 ⇔x-1=3x-5⇔x=2 δεκτή\end{array}$

6. x-2=0 και x2-2x=0 κοινή λύση x=2

Ανισώσεις με απόλυτα

1. |Α(x)|<θ, θ>0 $⇔$ -θ<Α(x)<θ

2. |Α(x)|<θ, θ<0 αδύνατη

3. |Α(x)|>θ, θ≥0 $⇔$ Α(x)<-θ ή Α(x)>θ.

4.|Α(x)|>θ, θ<0 αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x

5. $x^{2}<θ^{2}⇔\left|x\right|^{2}<θ^{2}⇔\left|x\right|<θ[\left|x\right|,θ μη αρνητικοί]⇔-θ<x<θ$

6. $x^{2}>θ^{2}⇔\left|x\right|^{2}>θ^{2}⇔\left|x\right|>θ[\left|x\right|,θ μη αρνητικοί]⇔$ x>θ ή x<-θ.

7. |Α(x)|<|Β(x)| υψώνουμε στο τετράγωνο τις Α(x) και Β(x)

Ασκήσεις

1. **Να λυθεί η ανίσωση: |x - 2| < 3**

**2. Να λυθεί η ανίσωση: |2x - 1| >5**

**3. Να λυθεί η ανίσωση: x2<49**

**4. Να λυθεί η ανίσωση:|2x-3|<|2x+1|**

**Λύσεις**

**1. -3<x-2<3**$⇔$**-1<x<5**

Άρα η ανίσωση αληθεύει για x$\in (-1,5)$

2. Από την ιδιότητα |x| > ρ ⇔ x < -ρ ή x > ρ έχουμε :

2x-1>5 ή 2χ-1<-5$⇔$x>3 ή x<-2

Άρα η ανίσωση αληθεύει για x$\in $ (-∞,-2) U (3,+∞).

**3. x2<49**$⇔$**|x|<7**$⇔$**-7<x<7**

**4. |2x-3|2<|2x+1|2**$⇔$ **(2x-3)2<(2x+1)2**$⇔ $**x>1/2**