# Όριο στο x0.

# Η έννοια του ορίου.

Α) Περιγράφω γραφικά το όριο της συνάρτησης σε σημείο χ0.

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό l , καθώς το x προσεγγίζει με οποιοδήποτε τρόπο τον αριθμό χ0 , τότε γράφουμε $\lim\_{x\to x\_{0}}f\left(x\right)=l$.

Είναι μία βασική έννοια που σχετίζεται με την συμπεριφορά της συνάρτησης γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο.

Π.χ f(x)=2χ-1, x$\in R$.

<https://www.desmos.com/calculator/gsqda33hak>

Γραφουμε ότι $\lim\_{x\to -2}(2x-1)=-5$.

# Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση f(x)=$\frac{x^{2}-1}{x-1}$, με πεδίο ορισμού το $R-\left\{1\right\}$.

[*https://www.desmos.com/calculator/wp9lvd25ir*](https://www.desmos.com/calculator/wp9lvd25ir)

*Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα  xʹx, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το  f(x), κινούμενο πάνω στον άξονα  yʹy, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές  f(x) είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα x ≠ 1 που είναι αρκούντως κοντά στο 1".

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε* $\lim\_{\begin{array}{c}x\to 1\\+\end{array}}f(x)=2$

# Σχόλια

\_Το x0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ). Η τιμή της f στο x0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).



Γ) το x0$\notin Α\_{f}$ και

 $\lim\_{x\to x\_{0}}f\left(x\right)=l$

f(x0)

B) το x0$\in Α\_{f}$ και

 $\lim\_{x\to x\_{0}}f\left(x\right)=l\ne f(x\_{0})$

Α) το x0$\in Α\_{f}$ και

 $\lim\_{x\to x\_{0}}f\left(x\right)=l$=$f(x\_{0})$

|  |
| --- |
| - Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής: (α, x0) ∪ (x0, β)    ή    (α, x0)    ή    (x0, β).ΟΡΙΟ ΚΑΛΩΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟ* Αν η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (α, x0)   αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής   (x0, β). τότε ορίζουμε $\lim\_{x\to x\_{0}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to x\_{0}^{-}}f\left(x\right)=l$.
* Αν η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (x0, β) αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x0)   τότε ορίζουμε$\lim\_{x\to x\_{0}}f\left(x\right)=$ $\lim\_{x\to x\_{0}+}f\left(x\right)=l$
* Για να έχει νόημα η αναζήτηση Toυ $\lim\_{x\to x\_{0}}f\left(x\right)$ αρκεί το x0 να είναι άκρο ή σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της.
* Αν μία συνάρτηση f έχει όριο στο x0 τότε είναι μοναδικό.
* Π.χ Δεν έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο$\lim\_{x\to -2}\sqrt{x}$ γιατί η συνάρτηση f(x)=$\sqrt{x}$ δεν ορίζεται κοντά στο -2 αφού το πεδίο ορισμού της είναι το [0, $+\infty $) .

 |

# Πλευρικά όρια

Έστω, τώρα, η συνάρτηση 



Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά (x<1), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

|  |
| --- |
| Εικόνα |

— ΄Οταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά (x>1), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

|  |
| --- |
| Εικόνα |

Γενικά:

Τους αριθμούς  και  τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x0 και συγκεκριμένα το ℓ1 **αριστερό όριο** της f στο x0, ενώ το ℓ2**δεξιό όριο** της f στο x0.