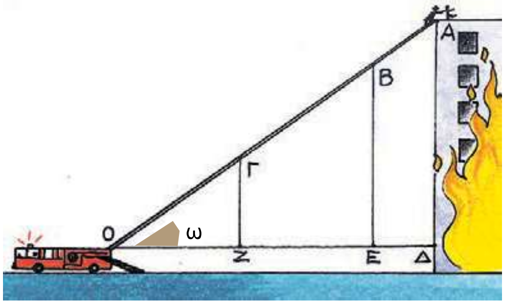
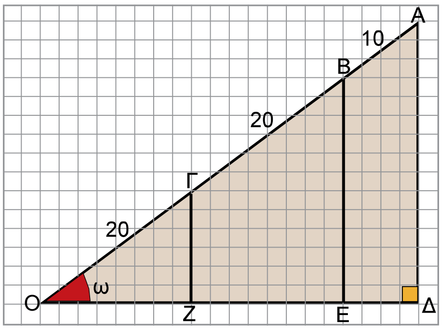
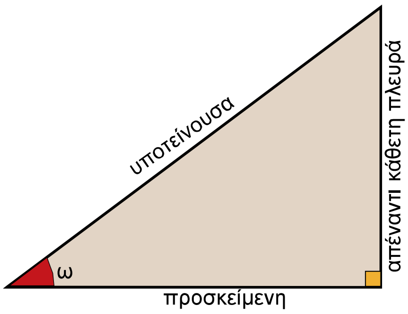
2.2. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας







Το ημίτονο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ένα πυροσβεστικό όχημα σταματά μπροστά από ένα κτίριο που φλέγεται, για να κατεβάσει έναν άνθρωπο που βρίσκεται στην ταράτσα του κτιρίου. Η σκάλα του οχήματος έχει μήκος ΟΑ = 50 m και το κτίριο έχει ύψος ΑΔ = 30 m. Ο πυροσβέστης που βρίσκεται στην άκρη της σκάλας παίρνει τον άνθρωπο που κινδυνεύει και η σκάλα αρχίζει να μαζεύεται.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΟΑ = 50	ΑΔ = 30	$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} =$
ΟΒ = 40	ΒΕ = 24	$\frac{ΒΕ}{ΟΒ} =$
ΟΓ = 20	ΓΖ = 12	$\frac{ΓΖ}{ΟΓ} =$

Τι παρατηρείτε;

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι της τρίτης στήλης παραμένουν σταθεροί:

$$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}, \quad \frac{ΒΕ}{ΟΒ} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} \quad \text{και} \quad \frac{ΓΖ}{ΟΓ} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Είναι φανερό ότι ο λόγος αυτός παραμένει σταθερός για κάθε διαδοχική θέση της σκάλας. Επίσης, είναι φανερό ότι η γωνία ω στα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΕ, ΟΓΖ που σχηματίζονται, παραμένει σταθερή.

Ο σταθερός αυτός λόγος γράφεται ως: $\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$

ονομάζεται **ημίτονο της γωνίας ω** και συμβολίζεται με **ημω**. Δηλαδή

$$\boxed{\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}}$$

Επομένως:

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **ημίτονο της γωνίας ω.**

Το συνημίτονο

Αν συμπληρώσουμε, τώρα, τον πάρακάτω πίνακα για το ίδιο σχήμα:

ΟΑ = 50	ΟΔ = 40	$\frac{ΟΔ}{ΟΑ} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$
ΟΒ = 40	ΟΕ = 32	$\frac{ΟΕ}{ΟΒ} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$
ΟΓ = 20	ΟΖ = 16	$\frac{ΟΖ}{ΟΓ} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

παρατηρούμε ότι σχηματίζεται και ένας δεύτερος σταθερός λόγος:

$$\frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Ο λόγος αυτός ονομάζεται **συνημίτονο της γωνίας ω** και συμβολίζεται **συνω**.

$$\boxed{\textbf{συνω} = \frac{\textbf{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\textbf{υποτείνουσα}}}$$

Επομένως:

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **συνημίτονο της γωνίας ω.**

Παρατηρήσεις:

α) Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις κάθετες πλευρές, οπότε οι λόγοι:

$$\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \quad \text{και} \quad \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

είναι μικρότεροι της μονάδας. Επομένως ισχύουν οι ανισώσεις:

$$\mathbf{0 < ημω < 1 \quad και \quad 0 < συνω < 1}$$

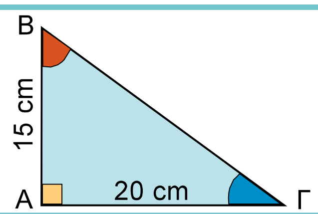
για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω.

β) Αν τώρα διαιρέσουμε το ημω με το συνω θα προκύψει $\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{ΑΔ}{ΟΑ}}{\frac{ΟΔ}{ΟΑ}} = \frac{ΑΔ}{ΟΔ} = εφω$, όπως φαίνεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΔ του σχήματος της προηγούμενης σελίδας. Άρα:

$$\boxed{\textbf{εφω} = \frac{\textbf{ημω}}{\textbf{συνω}}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 15 cm και ΑΓ = 20 cm. Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$.
Τι παρατηρείτε;



Λύση: Για τον υπολογισμό του ημιτόνου ή του συνημιτόνου μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, πρέπει να γνωρίζουμε και το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:
$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$ οπότε $ΒΓ = \sqrt{625} = 25$ cm.

Άρα:

$$ημ\hat{Β} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία } \hat{Β}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$συν\hat{Β} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία } \hat{Β}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$ημ\hat{Γ} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία } \hat{Γ}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$συν\hat{Γ} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία } \hat{Γ}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Παρατηρούμε ότι $ημ\hat{Β} = συν\hat{Γ}$ και $ημ\hat{Γ} = συν\hat{Β}$.

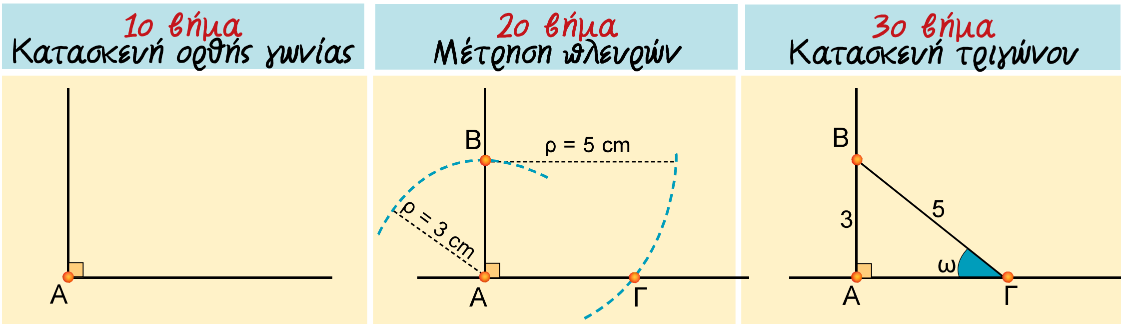
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να σχεδιαστεί μία οξεία γωνία ω, με ημω = $\frac{3}{5}$.

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό του ημιτόνου οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει:

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}.$$

Επομένως, για να κατασκευάσουμε οξεία γωνία ω με ημω = $\frac{3}{5}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 3 και η υποτείνουσά του ίση με 5.

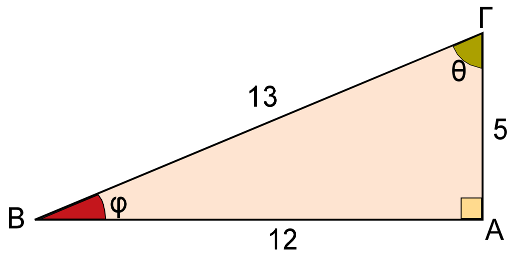


Για τη γωνία ω ισχύει: $ημω = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{3}{5}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

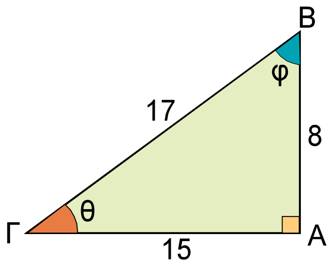
		Α	Β	Γ	Δ
α)	ημθ =	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$
β)	ημφ =	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{5}$
γ)	συνθ =	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{5}{13}$
δ)	συνφ =	$\frac{5}{13}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{13}{12}$



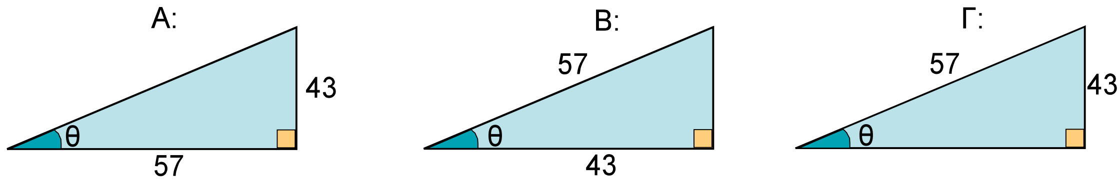
2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος ποιος από τους παρακάτω αριθμούς:

Α: συνθ Β: συνφ Γ: ημφ

ισούται με $\frac{8}{17}$;



3. Σε ποιο από τα παρακάτω τρίγωνα ισχύει συνθ = $\frac{43}{57}$;



4. Αν ημθ = $\frac{3}{5}$ και συνθ = $\frac{4}{5}$, τότε: εφθ = ... Α: $\frac{3}{4}$, Β: $\frac{4}{3}$, Γ: $\frac{5}{3}$, Δ: $\frac{5}{4}$

Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

5. Να βάλετε σε κύκλο τις τιμές που δε μπορούν να εκφράζουν το συνημίτονο οξείας γωνίας:

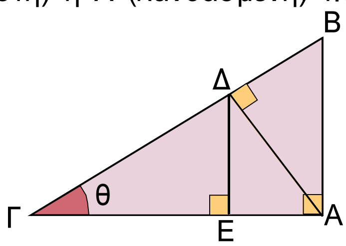
α) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ β) $-\frac{1}{2}$ γ) $\frac{2}{3}$ δ) $\frac{3}{2}$ ε) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ στ) 1,45

6. Δίνεται το διπλανό σχήμα. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω σχέσεις:

α) συνθ = $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ β) συνθ = $\frac{ΓΔ}{ΑΓ}$ γ) συνθ = $\frac{ΓΒ}{ΓΕ}$

δ) συνθ = $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ ε) συνθ = $\frac{ΓΕ}{ΓΔ}$ στ) ημθ = $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$

ζ) ημθ = $\frac{ΔΕ}{ΓΔ}$ η) ημθ = $\frac{ΑΔ}{ΓΔ}$ θ) ημθ = $\frac{ΑΔ}{ΑΓ}$



7. Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{Α}$ είναι ορθή. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω φράσεις:

α) Στο τρίγωνο .... είναι: συν $Α\hat{Δ}Β$ = $\frac{.......}{.......}$.

β) Στο τρίγωνο .... είναι: ημ $Α\hat{Β}Γ$ = $\frac{.......}{.......}$.

γ) Στο τρίγωνο .... είναι: συν......... = $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.