

Ιδιότητες

10) Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ με $x_1 \cdot x_2 \neq 0$

Τότε ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{b}} = -1$

όπου $\lambda_{\vec{a}}$, $\lambda_{\vec{b}}$ οι συγτελεστές διευθύνου των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Απόδειξη $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} + \frac{y_1 \cdot y_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{0}{x_1 \cdot x_2} \Leftrightarrow 1 + \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{b}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{\vec{a}} = \frac{y_1}{x_1}$$
$$\lambda_{\vec{b}} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$\lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{b}} = -1$$

Παράδ. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (8, 6)$. Να εξετάσετε αν $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$\lambda_{\vec{a}} = \frac{4}{-3}, \lambda_{\vec{b}} = \frac{6}{8} \quad \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{b}} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{8} = -\frac{2}{2} = -1 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

2ος τρόπος: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = -24 + 24 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Παράδ. 1.2 εξετάσεις αν τα διανύσματα $\vec{a} = (0, 3)$, $\vec{b} = (\sqrt{2}, 0)$ είναι κάθετα.

$$\vec{a} = (0, 3)$$

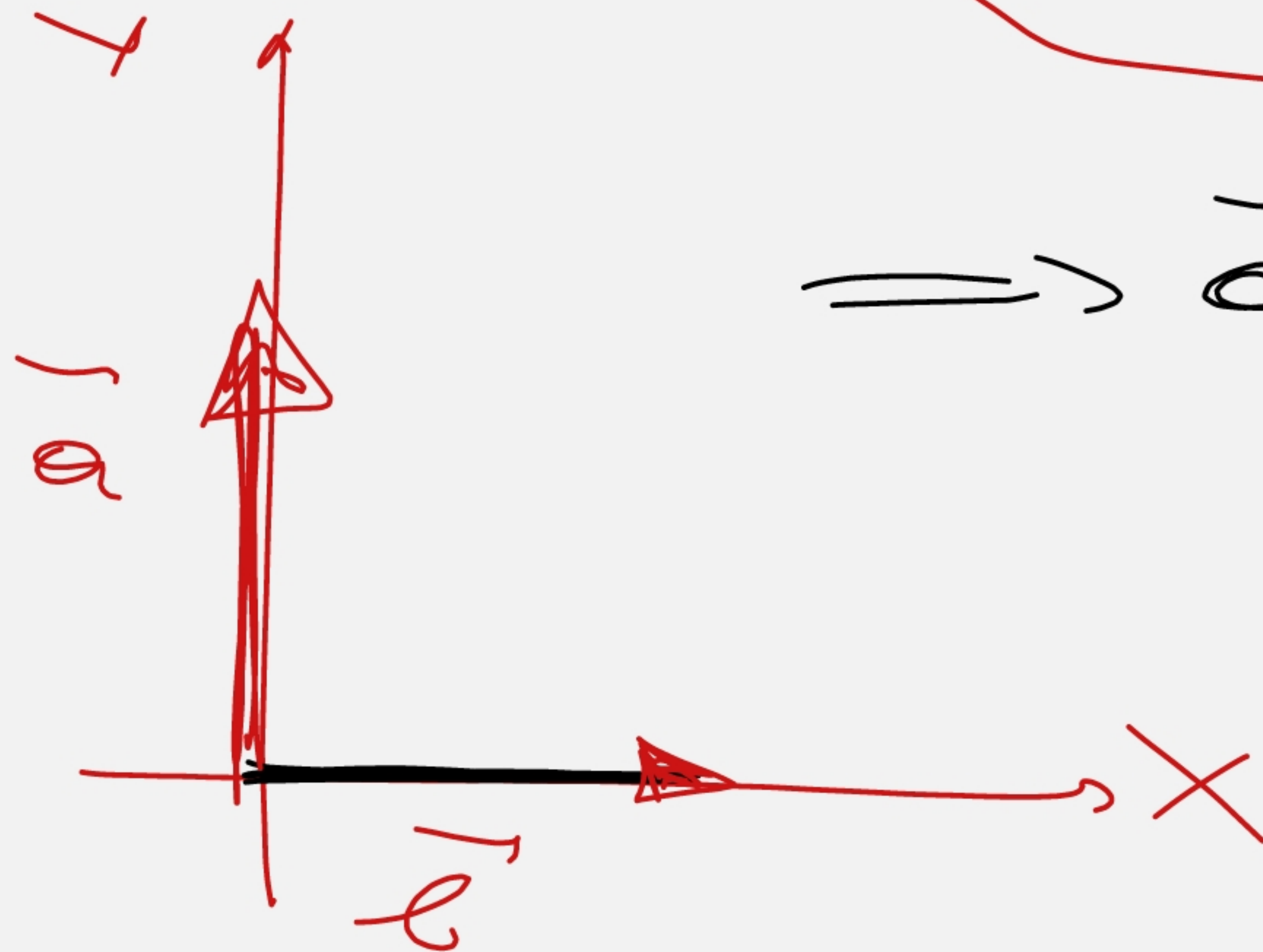
$$0\vec{i} + 3\vec{j}$$

$\vec{a} \parallel \vec{y}$

$$\vec{b} = (\sqrt{2}, 0)$$

$$\sqrt{2}\vec{i} + 0\vec{j}$$

$\vec{b} \parallel \vec{x}$



$$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Παραμπλιν ον

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 0 = 0 \text{ Άρα } \vec{a} \perp \vec{b}$$

αβχ.6 / Σελ. 47

$$\vec{a} = (k, 1), \vec{b} = (4, 3)$$

$$(i) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$$

$$k \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4k + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4k = -3$$

$$k = -\frac{3}{4}$$

$$(ii) (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4k + 3}{\sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4k + 3}{5\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4k+3) \cdot 2 = \sqrt{2} \cdot 5 \cdot (\sqrt{k^2+1}) \quad \Rightarrow$$

$$(4k+3)^2 \cdot 4 = 2 \cdot 25 \cdot (k^2+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(16k^2 + 24k + 9) \cdot 4}{2} = \frac{25}{50} \cdot (k^2+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$32k^2 + 48k + 18 = 25k^2 + 25 \quad (\Rightarrow)$$

$$7k^2 + 48k - 7 = 0$$

$$\Delta = 48^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-7) = 2500 = 25 \cdot 100$$

$$k_{1,2} = \frac{-48 \pm 50}{2 \cdot 7} = \begin{cases} \frac{-98}{14} = -7 \\ \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \end{cases}$$

"kann endgültig sein"

$$\frac{4k+3}{5\sqrt{k^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = -7 \quad \dots \dots \dots \text{dnoppin 28221}$$

$$k = \frac{1}{7} \quad \dots \dots \dots ok.$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 52.10210 / 26k \cdot 5 / 2 \cdot 47 \\ 26k6 \text{ in} \\ 264.7 \end{array}$$

