

3. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox.

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

$$\delta) \vec{\alpha} = (3, 3\sqrt{3})$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$$

$$\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j} \Rightarrow \vec{\alpha} = (3, 3\sqrt{3})$$

$$\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i} \Rightarrow \vec{\beta} = (\sqrt{2}, 0)$$

$$\vec{\gamma} = -3\vec{j} \Rightarrow \vec{\gamma} = (0, -3), \quad \vec{\delta} = (-1, 1)$$

$$\lambda) \lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{y}{x} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{δεν ορίζεται } \lambda_{\vec{\gamma}}$$

$$\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lambda) \text{ Αφού } \lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \omega = \sqrt{3} \Rightarrow \omega = \pi/3$$

$$\text{Αφού } \lambda_{\vec{\beta}} = 0 \Rightarrow \tan \omega = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

$$\text{για το } \vec{\gamma}: \tan \omega = -\infty \Rightarrow \omega = 270^\circ$$

$$\text{Αφού } \lambda_{\vec{\delta}} = -1 \Rightarrow \tan \omega = -1 \Rightarrow \omega = 180 - 45 = 135^\circ$$



12. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την $(x-y)^2 - (x-y) - 6 = 0$ (2). Επιπλέον ότι η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε.

Έστω $\varepsilon_1: x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.

β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες.

γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών.

$$x^2 + y^2 + y = x + \underline{2xy} + 6$$

$$\underbrace{x^2 - 2xy + y^2} + \underbrace{y - x - 6} = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(x-y)^2 - (x-y) - 6 = 0 \quad \text{o. ε.δ.}$$

$$\text{Θέτουμε } x-y = \omega \quad \omega^2 - \omega - 6 = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x-y=3 \quad \text{ή} \quad x-y=-2 \quad (\Rightarrow)$$

$$-y = -x + 3$$

$$y = x - 3$$

$$x-y=-2 \quad (\Rightarrow)$$

$$-y = -x - 2 \quad (\Rightarrow)$$

$$y = x + 2 \quad \text{2 ευθείες}$$

η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες, οι οποίες έχουν ίδιο βωτισμό $\frac{5}{\sqrt{2}}$

$$\text{Οποιοδήποτε σημείο } M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right) \text{ ισαπέχει από τις δύο ευθείες.}$$

$$d(M, \varepsilon_1) = \frac{\left| \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - 3 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| \alpha - \alpha + \frac{1}{2} - 3 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| -\frac{5}{2} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{β) } M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right) \\ d(M, \varepsilon_1) &= \frac{\left| \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - 3 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \\ &= \frac{\left| \alpha - \alpha + \frac{1}{2} - 3 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| -\frac{5}{2} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$d(M, \varepsilon_2) = \frac{\left| \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + 2 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| \alpha - \alpha + \frac{1}{2} + 2 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \frac{5}{2} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

Η μέση ομοτιμία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, όπου $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ id ομοτιμία

$$M(a, a - \frac{1}{2}), a \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = a \\ y = a - \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x - y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x - y + \frac{1}{2} = 0}$$

Nα βρεθεί ο γ.ν. του

$$M(2nt, 26wt - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2nt \\ y = 26wt - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2nt \\ y + 1 = 26wt \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 4n^2t \\ (y+1)^2 = 46^2t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + (y+1)^2 = 4(n^2t + 6^2t) \\ x^2 + (y+1)^2 = 4 \end{array} \right\}$$

Nα βρεθεί ο γ.ν. του ομοτιμίου

$$M(2t, 3t+1), t \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3t + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x = 6t \\ -2y = -6t - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$3x - 2y = -2$$

$$3x - 2y + 2 = 0$$

ευθεία