ΘΕΜΑ 4 36671

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός $x$ που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

(Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του $x$.

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

(Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4|+|x-14|=18$$

(α) $d(x,5) \le 9$

Η απόσταση του $x$ από το 5 είναι $\le$ του 9.

(β)


$x \in [-4, 14]$

(γ) $|x-5| \le 9 \Leftrightarrow$

$-9 \le x-5 \le 9 \Leftrightarrow$

$-9+5 \le x-\cancel{5}+\cancel{5} \le 9+5 \Leftrightarrow$

$-4 \le x \le 14$, $x \in [-4, 14]$

(δ) $-4 \le x \le 14 \Rightarrow -4+4 \le x+4 \le 14+4 \Leftrightarrow$

$0 \le x+4 \le 18 \Rightarrow |x+4| = x+4$

$-4 \le x \le 14 \Leftrightarrow -4-14 \le x-14 \le 14-14 \Leftrightarrow$

$-18 \le x-14 \le 0 \Rightarrow |x-14| = -x+14.$

Τώρα $|x+4|+|x-14| = x+4+(-x+14) =$

$x+4-x+14 = 18$ ο.ε.δ.

ΘΕΜΑ 4 36669

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \le |x| \le 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.

(Μονάδες 5)

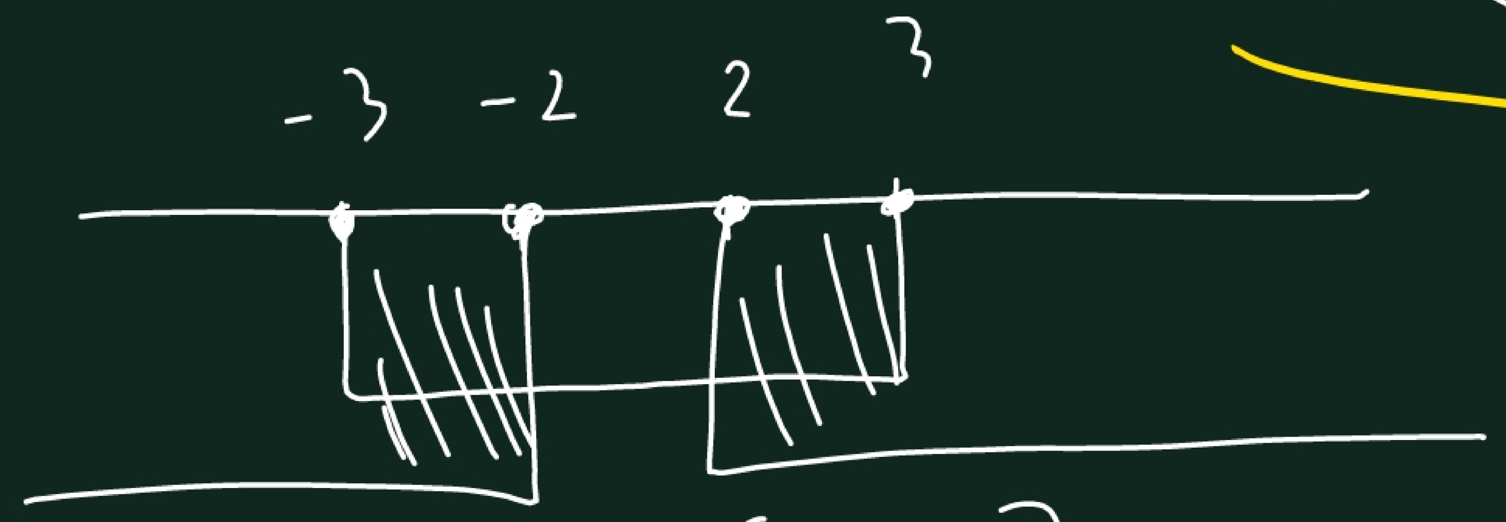
γ) Αν οι αριθμοί $\rho_1$ και $\rho_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

(α) $2 \le |x| \le 3$

$|x| \le 3$ και $|x| \ge 2$

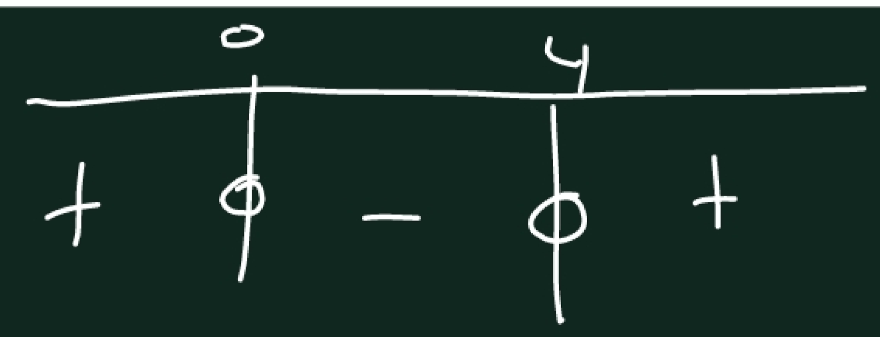
$-3 \le x \le 3$ και $x \ge 2$ ή $x \le -2$




$x \in [-3,-2] \cup [2,3]$

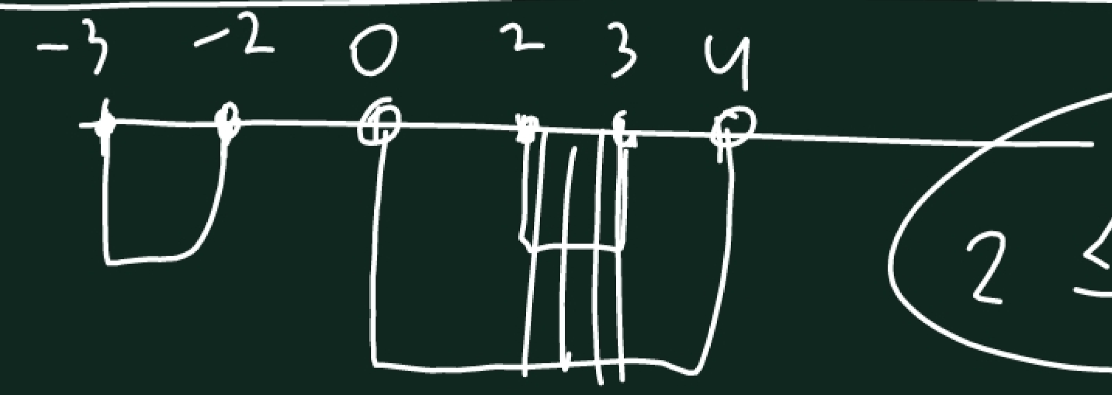
$x^2 - 4x < 0$. λύνω πρώτα την εξίσωση:

$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$




$x \in (0,4)$

(β)




$2 \le x \le 3$

(γ) $2 \le \rho_1 \le 3$, $2 \le \rho_2 \le 3$ $\Rightarrow$ $4 \le \rho_1 + \rho_2 \le 6 \Rightarrow$

$\frac{4}{2} \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le \frac{6}{2} \Leftrightarrow$

$2 \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le 3$. Άρα το $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων.

ΘΕΜΑ 4 36680

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-4x+\alpha \text{ και } g(x)=\alpha x-5, \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του $\alpha$.

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha=1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$.

(α) $f(2)=g(2) \Leftrightarrow$

$2^2-4\cdot 2+a=2\cdot a-5$

$4-8+a=2a-5$

$2a-a=4-8+5$

$a=1$

(β) Για $a=1 \Rightarrow f(x)=x^2-4x+1, \quad g(x)=x-5$

(i) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow$

$x^2-4x+1=x-5 \Leftrightarrow$

$x^2-4x+1-x+5=0 \Leftrightarrow$

$x^2-5x+6=0$

$x_{1,2}=\begin{cases}2\\3\end{cases}$

(ii) $f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow$

$x^2-4x+1\geq x-5 \Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0$

| $x$ | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

$|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x) \Leftrightarrow$

$f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

$x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.