

ΤΡΙΩΝΥΜΟ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΣΠΥΡΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΟΜΙΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ.

4.1 Λύση της εξίσωσης $ax^2+bx+\gamma=0$, $a \neq 0$

1) Να λυθεί η εξίσωση: $(x+\frac{1}{3}) \cdot (x-\frac{1}{3}) = 2x - \frac{1}{9}$

2) Αν η εξίσωση $(2x-3)|\lambda|+3 = 2\lambda^2 x$ έχει ρίζα το 2, να υπολογιστεί ο λ .

3) α) Αν x, y ρητοί, $\lambda > 0$ και $\sqrt{\lambda}$ άρρητος τότε να δείξετε ότι: $x+y\sqrt{\lambda} = 0 \Leftrightarrow x=0$ και $y=0$

β) Να δείχθει ότι: αν a, b, γ, k ρητοί αριθμοί, $\lambda > 0$ και $\sqrt{\lambda}$ άρρητος και η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ $a \neq 0$, έχει ρίζα τον αριθμό $k+\sqrt{\lambda}$, τότε η εξίσωση αυτή, έχει ρίζα τον $k-\sqrt{\lambda}$.

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

4) Αν $a+b+\gamma=0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ έχει ρίζα το 1.

5) Αν ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2+ax+b=0$, να δείξετε ότι $|\rho|^2 \leq |a| \cdot |\rho| + |b|$.

6) Να δείχθει ότι η εξίσωση $3x^2+2(a+b+\gamma) \cdot x + (ab+a\gamma+b\gamma)=0$ έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν $a=b=\gamma$.

7) Να δείχθεί ότι: αν η εξίσωση

$$(2a-b)x^2 - 4ax + 4b = 0 \text{ έχει διηγή ρίζα, τότε}$$

η εξίσωση $(a^2+b^2)x^2 - 2x + 3(a-b) = 0$ έχει 2 ρίζες άντιθετες.

8) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2x - \mu + 3 = 0$. Να βρεθεί για ποιές τιμές του μ αυτή έχει:

α) 2 ρίζες άντιθετες

β) 1 διηγή ρίζα

γ) δεν έχει ρίζες.

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

4.2 Τύποι Vieta

9) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 7x + 1 = 0$. Να ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της, να υπολογίσετε τις παρακάτω:

α) $\rho_1^2 + \rho_2^2$

β) $\rho_1^3 + \rho_2^3$

γ) $\rho_1^2 \rho_2 + \rho_1 \rho_2^2$

δ) $\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}$

ε) $\frac{\rho_1}{\rho_2^2} + \frac{\rho_2}{\rho_1^2}$

στ) $|\rho_1 - \rho_2|$

ζ) $|\rho_1^2 - \rho_2^2|$

η) $\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}$

10) Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - kx + \lambda = 0$ να δείξετε ότι

$$|\rho_1| + |\rho_2| = \begin{cases} |k|, & \text{αν } \lambda \geq 0 \\ \sqrt{k^2 - 4\lambda}, & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

11) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2+bx+\gamma=0$, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες:

α) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$, β) $-x_1, -x_2$, γ) x_1^2, x_2^2

δ) $2x_1, 2x_2$ ε) $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$, στ) $\frac{1}{ax_1+b}, \frac{1}{ax_2+b}$

12) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2+bx+\gamma=0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της $a'x^2+b'x+\gamma'=0$, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες $x_1\rho_1+x_2\rho_2$, $x_1\rho_2+x_2\rho_1$,

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

13) Δίνεται η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$. Να δείξετε ότι αν $\frac{\gamma}{a} < 0$ τότε $\Delta > 0 \Rightarrow$ έχει 2 ρίζες ετερόσημες. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

14) Δίνεται η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$. Ποιες σχέσεις υπάρχουν μεταξύ των a, b, γ ώστε να έχει:

- α) 2 ρίζες ετερόσημες
- β) 2 ρίζες αντίθετες, γ) 2 ρίζες θετικές
- δ) 2 ρίζες αρνητικές, ε) 1 διπλή θετική
- στ) 1 διπλή αρνητική, ζ) 2 ρίζες ομόσημες
- η) 1 ρίζα το 0 και η άλλη θετική.
- θ) 1 διπλή ρίζα το 0.

15) Στην προηγούμενη άσκηση πως μετατρέπονται οι σχέσεις με το δεδομένο ότι $\Delta \geq 0$.

16) Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0$.
Να βρεθεί ο πραγματικός λ ώστε η παραπάνω εξίσωση να έχει:

- α) μια μόνο ρίζα.
- β) μια διπλή ρίζα.

17) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για να έχει η εξίσωση: $3x^2 - 2x + 3(\lambda - 7) = 0$

- α) ρίζες θετικές
- β) ρίζες ετερόσημες
- γ) ρίζες ίσες.

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

18) Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (5\lambda - 6\mu)x - 1 = 0$ είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης $\lambda x^2 + 13x - 2\mu + \lambda^2 = 0$ με $\lambda \neq 0$ είναι αντιστροφές τότε:

- α) να βρεθούν οι τιμές των λ και μ .
- β) να ληθούν οι εξισώσεις για τις τιμές των λ και μ που βρίκατε στο (α).

19) Να εξετάσετε ως προς την ορθότητα τους τους επόμενους ισχυρισμούς:

1) Η εξίσωση $ax^2 + \gamma = 0$ έχει πάντα διακρίνουσα αρνητική

2. Αν a, γ ετερόσημοι, η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει 2 ρίζες άνισες.

3. Η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$, $a \neq 0$ έχει μια ρίζα ίση με το 0, όταν η διακρίνουσά της είναι 0.

4. Η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ έχει 2 ρίζες άνισες αν $a > 0$ και $\gamma > 0$.

5. Οι αριθμοί 2 και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$.

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

6. Αν η εξίσωση $x^2-2x+1=0$ έχει $\Delta > 0$ τότε έχει 2 ρίζες αντίστροφες.

7. Αν η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ έχει $b=0$ τότε έχει 2 ρίζες αντίθετες.

8. Αν η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ έχει ρίζες $p_1, p_2 \neq 0$ τότε η εξίσωση $\gamma x^2+bx+a=0$ έχει ρίζες $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}$.

9. Αν η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ έχει ρίζες p_1, p_2 τότε η εξίσωση $-ax^2-bx-\gamma=0$ έχει ρίζες $-p_1, -p_2$.

10. Αν η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$, $a < 0$ έχει 2 ρίζες ετερόσημες, τότε $\gamma < 0$.

11. Αν η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ έχει δυο ρίζες ομόσημες, τότε $b > 0$.

12. Αν η εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ έχει ρίζες p_1, p_2 τότε:

α) $p_1^2 + p_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2$

β) οι $|p_1|, |p_2|$ είναι ρίζες της $ax^2+b|x|+\gamma=0$.

20). Στις επόμενες ασκήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν η εξίσωση $x^2-2x-k=0$ έχει 2 ρίζες άνισες, για τον πραγματικό k ισχύει:

Α. $k < -1$ Β. $k \leq -1$ Γ. $k < 0$ Δ. $k > -1$

Ε. k οποιοδήποτε πραγματικός

2. Η εξίσωση $x^2 - kx + k^2 = 0$ με άγνωστο x ,
έχει για κάθε $k \in \mathbb{R}^*$:

- A. 2 ρίζες άνισες αρνητικές Δ. 1 διπλή θετική
B. 2 ρίζες άνισες θετικές Ε. 1 διπλή το μηδέν.
Γ. καμία πραγματική

3. Όταν οι α, β, γ ετερόσημοι, η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
έχει: A. 2 ρίζες άνισες, B. διπλή ρίζα θετική
Γ. διπλή αρνητική Δ. καμία ρίζα
Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

4. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \lambda x + 4 = 0$ είναι θετικές,
τότε ο λ είναι:

- A. $\lambda < -4$ B. $\lambda < 0$ Γ. $\lambda = 0$ Δ. $\lambda < -2$
Ε. οποιοδήποτε πραγματικός αριθμός.

5. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 5x - 7 = 0$, τότε
οι $-x_1, -x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης:

- A. $-x^2 - 5x + 7 = 0$ B. $x^2 - 5x + 7 = 0$ Γ. $x^2 - 5x - 7 = 0$
Δ. $-x^2 + 5x + 7 = 0$

6. Στην προηγούμενη εξίσωση, οι $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ είναι ρίζες
της εξίσωσης:

- A. $x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{7} = 0$ B. $x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{7} = 0$ Γ. $x^2 - 7x + 5 = 0$
Δ. $7x^2 - 5x - 1 = 0$

7. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $5x^2 + (3-\lambda)x - 1 = 0$ είναι αντίθετες τότε:

A. $\lambda < 0$ B. $\lambda = 0$ Γ. $\lambda = 3$ Δ. $\lambda = -3$.

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

8. Το ίδιο ερώτημα για την $5x^2 + (3-\lambda)x + 1 = 0$.

9. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3ax + a^2 = 0$, $a \neq 0$ είναι αντίθετες τότε ο a είναι:

A. οποιοδήποτε πραγματικός $\neq 0$ B. $a < 0$

Γ. $a = 1$ ή -1 Δ. $a = 9$ ή -9

10. Αν $a+b=5$ και $a \cdot b = 6$, τότε οι αριθμοί a, b είναι ρίζες της εξίσωσης.

A. $x^2 + 5x + 6 = 0$ B. $x^2 - 5x + 6 = 0$ Γ. $x^2 + 5x - 6 = 0$

Δ. $x^2 - 5x - 6 = 0$

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

11. Υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a+b=1$, $a \cdot b = 6$

A. ΝΑΙ B. ΟΧΙ Γ. Δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

12. Αν οι αριθμοί x_1, x_1^2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 6x - 27 = 0$, τότε ο x_1 ισούται με:

A. 9 B. -27 Γ. 3 Δ. -3 Ε. -9

21) Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση $x^2 - 5x + 2\lambda = 0$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 που ισχύει $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 13$

22) Για ποιές τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2\lambda x - \lambda + 5 = 0$ ικανοποιούν τη σχέση $p_1^3 + p_2^3 = 26$

23) Για ποιές τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x + 7 - \lambda = 0$ ικανοποιούν τη σχέση $|p_1 - p_2| = 8$

24) Για ποιές τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - \lambda - 5 = 0$ ικανοποιούν τη σχέση $2p_1 - 3p_2 = 14$.

25) Να βρωθεί το πρόσημο των ριζών σε κάθε μια εξίσωση για τις διάφορες τιμές του λ .

α) $x^2 - 2x + 3 - \lambda = 0$ β) $x^2 - 2(\lambda - 2)x - 4(\lambda - 1) = 0$.

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

4.3. Εξισώσεις και ανισότητες

26) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$ β) $x^4 - (a+1)x^2 + a = 0$

γ) $|x^2 - x| + |x^2 - 11x + 10| = 0$ δ) $x - \sqrt{x} = 20$

ε) $(1 - |x|)^2 = 4$ στ) $\frac{2}{|x|} = \frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}$

ζ) $x^4 - 3a^2x^2 - 4a^2 = 0$

η) $\gamma^4x^4 + (a^2\gamma^2 - b^2\gamma^2)x^2 - a^2b^2 = 0$

θ) $(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) - 4 = 0$

ι) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

27) Όμοιως οι εξισώσεις:

α) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0$, β) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{19x}{12}$

28) Να λύσουν τα συστήματα και να ερμηνεύσουν γραφικά οι λύσεις σε όσα είναι δυνατό.

$$\begin{array}{lll} \text{α) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} & \text{β) } \begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ a + b = 6 \end{cases} & \text{γ) } \begin{cases} xy + x + y = -1 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad & x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ & (x+y) \cdot (x^2 + y^2) = 65 \end{aligned}$$

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

29) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία $y = \lambda x + 3$ εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$;

30) Δείξτε ότι η ευθεία $y = 3x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{6}{x}$ τέμνονται για οποιοδήποτε λ σε 2 σημεία.

31) Για ποιά τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ευθεία $y = -x + \lambda$ είναι εφαπτομένη της υπερβολής $y = \frac{4}{x}$;

32) Ένας χορογράφος σχεδιάζοντας τις θέσεις των χορευτών σε κάποια χορογραφία θέλει να τους διατάξει σε τετράγωνο. Αν σχηματίζει x σειρές με x χορευτές στην κάθε σειρά θα περιβέψουν 10 χορευτές. Εάν προσθέσει 2 χορευτές στην κάθε σειρά θα σχηματίσει τετράγωνο που θα του λείπουν 10 χορευτές. Να βρείτε τον αριθμό x των χορευτών του 1ου

τετραγώνου και τον συνολικό αριθμό y των χορευτών.

33) Ένα αγρόκτημα οργώνεται από 2 τρακτέρ Α και Β, αν δουλέψαν συγχρόνως, σε 6 ώρες. Αν οργώνει το κτήμα μόνο το τρακτέρ Α χρειάζονται 5 ώρες περισσότερες από όσες χρειάζονται για να το οργώσει το τρακτέρ Β. Να βρεθεί πόσες ώρες καθένα τρακτέρ οργώνει μόνο του το κτήμα.

34) Το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι 25 cm^2 . Πότε το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο και ποιά είναι αυτή;

35) Σε τραπέζιο το άθροισμα των βάσεων και του ύψους του είναι 40. α) Για ποιά τιμή του ύψους του το εμβαδόν του τραπεζίου γίνεται μέγιστο, β) Πόσο είναι το εμβαδόν αυτό;

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

36) Δω φυσικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός έχουν άθροισμα 64. Ποιοί είναι οι αριθμοί όταν το γινόμενό τους μεγιστοποιείται;

37) Στις επόμενες ερωτήσεις, να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1) Η εξίσωση $x^2 - k|x| - 3 = 0$, $k \in \mathbb{R}^*$ έχει:

- Α. 1 λύση Β. 2 λύσεις Γ. καμία λύση
Δ. 4 λύσεις Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

2. Το ίδιο για την εξίσωση $x^4 + 3x^2 + k = 0$, $k > 0$.

3. Το ίδιο για την εξ. $x^4 - 3x^2 + k = 0$, $k > 0$

4. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 8$ και η ευθεία $y = x$ έχουν:

A. 1 κοινό σημείο στον άξονα $y'y$

B. 2 κοινά σημεία στον άξονα $x'x$

Γ. 2 κοινά σημεία αντισυμμετρικά

Δ. κανένα κοινό σημείο.

5. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και η υπερβολή $y = \frac{2}{x}$ έχουν.

A. 1 κοινό σημείο

B. 2 κοινά σημεία

Γ. 4 κοινά σημεία

Δ. κανένα κοινό σημείο

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

4.4 Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$.

38) Να κάνετε μελέτη και γραφική παράσταση των επόμενων συναρτήσεων.

α) $f_1(x) = x^2 - 7x + 10$

β) $f_2(x) = x^2 - 3|x| + 2$

γ) $f_3(x) = |x^2 - 3x|$

δ) $f_4(x) = x|x - 1|$

ε) $f_5(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$

στ) $f_6(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$

ζ) $f_7(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2$

η) $f_8(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2$

θ) $f_9(x) = (x-1)^2 + 3$

ι) $f_{10}(x) = \frac{2}{x-3}$

ια) $f_{11}(x) = \frac{-3}{x+1}$

ιβ) $f_{12}(x) = \frac{1}{x} - 2$

ιγ) $f_{13}(x) = \sqrt{x-2}$

ιδ) $f_{14}(x) = \sqrt{x} + 2$

ιε) $f_{15}(x) = \sqrt{x-1} + 3$

39) Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση
 $f(x) = (\lambda+2)x^2 + \lambda x - 1$, $\lambda \neq -2$ να παρουσιάζει ακρότατο:
 α) στο -2 β) το -2 .

Να βρεθεί το είδος του ακροάτου για κάθε μια από τις περιπτώσεις.

40) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, που τέμνει τον $x'x$ στο σημείο με τετμημένη -1 , τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2 και παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 3$.

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

41) Για ποιά τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - (\lambda^2 - \lambda)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του; (την οποία και να προσδιορίσετε)

42) Έστω η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 3)x + (\lambda + 2) = 0$, $\lambda \neq -1$ (1).
α) Δείξτε ότι η (1) έχει 2 πραγματικές ρίζες για
κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) να προσδιορίσετε το λ ώστε να γίνεται ελάχιστη η παράσταση
 $A = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ και να βρείτε την τιμή της.

43) Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι τέ-
λειο τετράγωνο η παράσταση $A = \omega^2 - (\lambda + 1 - \omega) \cdot \omega + 2$

44) Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να γραφεται σαν διαφορά τετραγώνων η παράσταση $A = \lambda^2 - 4\lambda + \lambda^2$

45) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 4)x^2 + \lambda x - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$. Να προσδιορίσετε το λ ώστε η f να παρουσιάζει: α) ελάχιστο, β) μέγιστο.

46) Να λύθούν γραφικά οι εξισώσεις:

α) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

β) $x^2 - x - 2 = 0$

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

47) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφαπτεται στην παραβολή $\psi = x^2 - 6x + 3$, στο σημείο $A(2, -5)$.

48) Στις επόμενες ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 5x - k^2$, $k \neq 0$ έχει με τον άξονα $x'x$:

A. 1 κοινό σημείο

B. 1 κοινό σημείο το $O(0,0)$

Γ. κανένα κοινό σημείο

Δ. 2 κοινά σημεία

Δ. 2 κοινά σημεία, που ένα είναι το $O(0,0)$.

2. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = kx^2 - 2x + 1$, $k \neq 0$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$, τότε το k ισούται με:

A. -1

B. 1

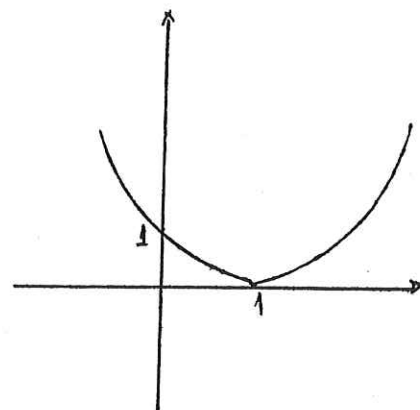
Γ. -2

Δ. 2

E. 4

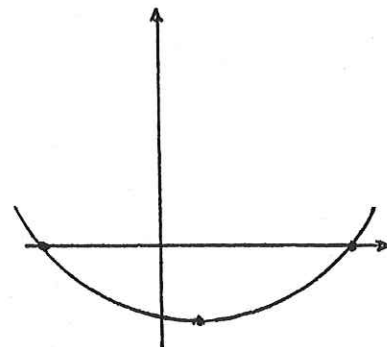
3. Ο τύπος της συνάρτησης που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι:

- Α. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ Β. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
 Γ. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ Δ. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
 Ε. $f(x) = x^2 - 3x + 1$



4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σχήμα, αντιστοιχεί στον τύπο (για κάθε $k \in \mathbb{R}$)

- Α. $f(x) = x^2 - kx + 5$ Β. $f(x) = x^2 - kx - 5$
 Γ. $f(x) = x^2 - x + k^2$ Δ. $f(x) = x^2 - 5x + k^2$



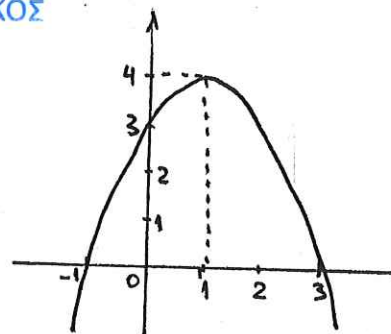
ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

5. Η παραβολή του διπλανού σχήματος αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + kx + \lambda$. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

- Α. $\Delta = 0$ Β. $k < 0$ Γ. $\lambda > 0$

Δ. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[1, +\infty)$

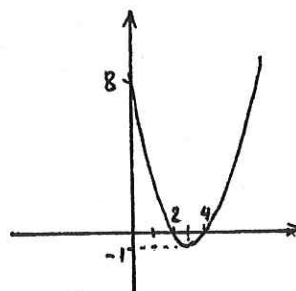
Ε. η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας του y/y .



6. Η παραβολή του διπλανού σχήματος αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

- Α. $a < 0$ Β. $ab > 0$ Γ. $a\gamma < 0$

Δ. Η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $[-1, +\infty)$



7. Αν $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο $f(x)$ γράφεται:

Α. $f(x) = \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$ Β. $f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
 Γ. $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ Δ. $f(x) = a \cdot \left[x + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$

Ε. $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$

49) Να βρείτε ποιο απ' όλα τα ορθόγωνα τρίγωνα με άθροισμα καθέτων πλευρών σταθερό, έχει μέγιστο εμβαδό και να το προσδιορίσετε.

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

4.5 Πρόβλημα τριωνύμου.

50) Να βρείτε σε ποιά διαστήματα του σύνολου των πραγματικών αριθμών, η γραφική παράσταση της κάθε δεξιάς συνάρτησης βρίσκεται "κάτω" απ' τον άξονα $x'x$ και σε ποιά "πάνω".

α) $f_1(x) = x^2 - 7x + 10$ β) $f_2(x) = x^2 - 16$ γ) $f_3(x) = x^2 - 2x$
 δ) $f_4(x) = -x^2 + 3x - 2$ ε) $f_5(x) = -x^2 + x - 1$ στ) $f_6(x) = x^2 + 1$
 ζ) $f_7(x) = -4x^2 + 4x - 1$ η) $f_8(x) = x^2 - 4x + 11$ θ) $f_9(x) = -x^2 + 7$

51) Να λύσετε τις ανισώσεις που προκύπτουν αν βάλουμε τον τύπο της κάθε συνάρτησης της άσκησης 30 " ≥ 0 ". Πως γράφεται το σύνολο λύσεων σε μορφή ένωσης διαστημάτων όταν βάλουμε " > 0 ";

52) Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $-3x^2 + 7x - 2 \leq 0$

β) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

γ) $-3x^2 + 4x - 2 > 0$

δ) $x^2 > x$

ε) $4x^2 \leq x$

ςτ) $x^2 + 3 > 0$

ζ) $(x+1) \cdot (4-x) \leq 0$

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

53) Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $(x-5) \cdot (x^2+1) \cdot (x^2-36) < 0$

β) $(8+2x-x^2) \cdot (x^2-6x+9) \leq 0$

γ) $(4-x) \cdot (2x^2+10x) \cdot (-x^2+6x-5) \geq 0$

δ) $(x+6) \cdot (x^2+5) \cdot (x^2-49) \geq 0$

ε) $(x^2+x-2) \cdot (x^2-2x+1) < 0$

ςτ) $(x-3)^{17} \cdot (x^2-3x+2)^{20} \cdot (-2x+3)^{10} \leq 0$

ζ) $(-x^2+1)^{15} \cdot (x^2-4x+3)^7 \cdot (-3x+11) > 0$

η) $(-2x+5)^{18} \cdot (2x^2-7x+5)^{13} \cdot (-x^2-1)^{25} \leq 0$

θ) $(3x-1)^3 \cdot (9x^2-1)^5 \cdot (3x+1)^7 > 0$

54) Να λυθούν οι ανισώσεις

α) $\frac{x-3}{x+2} > 0$

β) $\frac{3x-1}{x+\sqrt{2}} \leq 0$

γ) $\frac{\sqrt{3}}{x^2+x} < 0$

δ) $\frac{9x^2-18x+5}{x^2-16} \geq 0$

ε) $\frac{1}{x^2-11x+10} \geq 0$

ςτ) $\frac{x}{x-2} > 1$

ζ) $\frac{15}{x+2} \leq x$

η) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-10x+20} < 0$

θ) $\frac{2x+1}{x-2} \geq \frac{x+4}{2x+5}$

ι) $\frac{8+4x}{4x+x^2} \leq \frac{2}{x} + \frac{3}{4+x}$

ια) $\frac{x+2}{x^3-x^2} > \frac{2x+1}{x^3+x^2}$

55) Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x-1}{x^3+1}$ β) $|x^2+4x+3| > 3+x$

γ) $x^2 - |3x+2| + x \geq 0$

δ) $\left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 3$

ε) $\left| \frac{x^2-3x+2}{x^2-9} \right| = \frac{x^2-3x+2}{9-x^2}$

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ςτ) $|x^2-5x+6| + |2x+1| = |(x^2-5x+6)+(2x+1)|$

56) Να λυθούν τα επόμενα συστήματα:

α) $\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - x - 20 \leq 0 \end{cases}$

β) $\begin{cases} x^2 - 2(\sqrt{3}+1)x + 4\sqrt{3} > 0 \\ 2x^2 - 5x - 12 \leq 0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{x-2}{x+2} > 1 \\ 16-x^2 \geq 0 \\ 2x^3+5x^2 \geq 0 \end{cases}$

δ) $1-x > 1-x^2 > 1-x^3$

57) Να προσδιορίσετε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f_1(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{|x|-2}$

β) $f_2(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$

γ) $f_3(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{4-x^2} + \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+30}}$

δ) $f_4(x) = \frac{x^2}{2x^3+x^2-x}$

ε) $f_5(x) = \frac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x^2-10x+24}$

58) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση
 $x^2 - (3\lambda + 1)x + 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$ έχει 2 διαφορετικές
 θετικές ρίζες;

59) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση
 $-2x^2 + (3\lambda - 1)x + 3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ έχει ετερόσημες ρίζες.

60) Ομοίως για την εξίσωση:
 $(\lambda^2 - \lambda - 2)x^2 + 2x + \lambda^3 - 27 = 0$

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

61). Για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο
 $x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5$

- α) δεν έχει πραγματικές ρίζες;
- β) έχει αρνητικές ρίζες;
- γ) έχει θετικές ρίζες;

62) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις
 οποίες η εξίσωση $x^4 - 2(\lambda - 2)x^2 + 7 - \lambda = 0$ έχει
 4 διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

63) Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε ο αριθμός 4
 να είναι μεγαλύτερος και από τις 2 ρίζες
 της εξίσωσης $3x^2 - 5x + \lambda - 6 = 0$.

64) Να ληθούν οι ανισώσεις

α) $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$

β) $x^4 - 12x^2 + 27 < 0$

65) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $(\lambda-1)x^2 - 4x + \lambda + 2$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο για όλα τα $x \in \mathbb{R}$; Στη συνέχεια να βρεθούν τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση $(\lambda-1)x^2 - 4x + (\lambda+2) < 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

66) Για ποιές τιμές του $k \in \mathbb{R}$, η ανίσωση $2x^2 + kx + \frac{1}{16}(2-3k) > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

67) Για ποιές τιμές της παραμέτρου λ , οι ανισώσεις: α) $-x^2 + (k-1)x - 9 < 0$ και β) $(x-2a+3)(x-2+3a) < 0$, αληθεύουν για κάθε πραγματική τιμή του x .

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

68) Να αποδείξετε ότι τα τριώνυμα:

α) $f(x) = (x-k) \cdot (x-\lambda) + (x-\lambda) \cdot (x-\mu) + (x-\mu) \cdot (x-k)$ ($k < \lambda < \mu$)

β) $g(x) = (x-k) \cdot (x-\lambda) + p \cdot (x-k) + q(x-\lambda)$, ($k \neq \lambda$, $p, q < 0$)
έχουν ρίζες άνισες.

69) Σε κάθε μια από τις επόμενες ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν οι αριθμοί -1 και 3 είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x) = x^2 + bx + c$, ποιά από τις παρακάτω απαντήσεις είναι σωστή;

A. $f(5) < 0$ B. $f(-5) \leq 0$ Γ. $f(\frac{2}{3}) < 0$ Δ. $f(100) \leq 0$

2. Αν p_1, p_2 ($p_1 < p_2$) είναι οι ρίζες του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και $a \cdot f(1) < 0$, ο αριθμός 1 ανήκει στο διάστημα :

A. $(-\infty, p_1)$ B. (p_1, p_2) Γ. $[p_1, p_2]$ Δ. $(p_2, +\infty)$

3. Αν $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ με $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) < 0$ τότε :

A. $b^2 - 4a\gamma < 0$ B. $b^2 - 4a\gamma > 0$ Γ. $\frac{\gamma}{a} < 0$

Δ. $\frac{\gamma}{a} > 0$ Ε. $b^2 - 4a\gamma > 0$ και $\frac{\gamma}{a} > 0$

4. Αν $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με ρίζες p_1, p_2 , $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) > 0$ $-\frac{b}{2a} < \xi_1 < \xi_2$ τότε :

A. $p_1 < \xi_1 < \xi_2 < p_2$

B. $p_1 < \xi_1 < p_2 < \xi_2$

Γ. $\xi_1 < p_1 < \xi_2 < p_2$

Δ. $\xi_1 < \xi_2 < p_1 < p_2$

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

70) Να εξετάσετε αν είναι σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις :

1. Για το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ είναι $a \cdot f(1) < 0$, τότε αυτό έχει 2 ρίζες άνιγες.

2. Για το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ $a \neq 0$ ισχύει $a \cdot f(2) > 0$, τότε $p_1 < 2 < p_2$ (p_1, p_2 ρίζες).

3. Αν $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ τότε :

α) $f(-1997) < 0$ Σ Λ

β) $f(4 \cdot 10^5) > 0$ Σ Λ

γ) $f(2) > 0$ Σ Λ

δ) $f(7) > 0$ Σ Λ

ε) $f(\frac{1}{2.000}) < 0$ Σ Λ