

ΘΕΜΑ 2-3874

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{a^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha \cdot \beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-1080

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-1070

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq 0$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta + \beta\gamma}$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2-486

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, 1/\alpha$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-487

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 \quad (\text{Μονάδες 12})$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-7520

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2a^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$ όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-504

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $a + \frac{1}{a} < -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|a| + \frac{1}{|a|} > 2$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2-509

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2-3884

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-506

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ (Μονάδες 5)

β) $2x-3y$ (Μονάδες 10)

γ) y/x (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2-4299

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

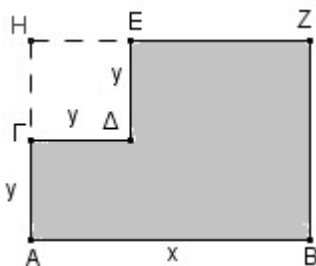
α) $y - x$ β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 12+13)

ΘΕΜΑ 2-1092

Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε

δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2-1541

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν

για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

- α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)
- β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2-1544

- α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . (Μονάδες 10)
- β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:
- $$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$
- (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2-991

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

- α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$ (Μονάδες 12)

- β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$

είναι αριθμός ανεξάρτητος του x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-996

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)
- β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-2702

Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. (Μονάδες 16)
- β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2-1009

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Να αποδείξετε ότι
- i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$
- ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$. (Μονάδες 12)
- β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$
 (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-1077

- α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5| < 4$. (Μονάδες 10)
- β) Αν κάποιος αριθμός a επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{a} < 1$$
 (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2-955

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A=B=4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$\sqrt{2}$, 1, $\sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-938

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-944

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-950

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-1276

Δίνεται η παράσταση: $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} + \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-8173

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες

(προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} = 1,41$ $\sqrt{3} = 1,73$ $\sqrt{5} = 2,24$ $\sqrt{7} = 2,64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς 20, 45 και 80. (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$A = \frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$ (Μονάδες 13)