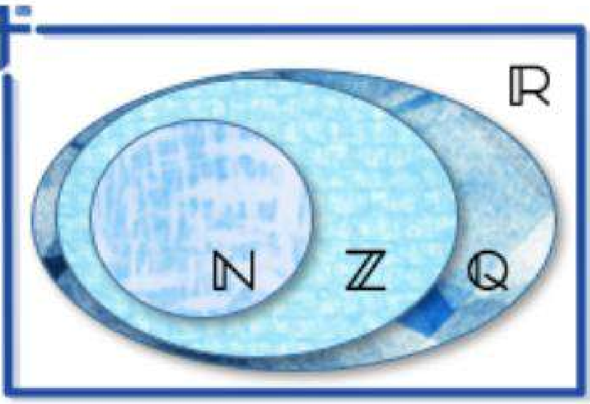
Συνολα-Ορισμος [Cantor]

Συνολο ονομαζουμε "καθε συλλογη αντικειμενων, που προερχονται απο την εμπειρια μας η απο την νοηση μας , ειναι καλα ορισμενα και διακρινονται με σαφηνεια το ενα απο το αλλο "

ΣΧΟΛΙΟ

- **Στοιχεια** η **μελη του συνολου** ονομαζονται τα αντικειμενα που αποτελουν το συνολο
- Τα συνολα συμβολιζονται με κεφαλαια γραμματα [Ελληνικα η Λατινικα], ενω τα στοιχεια με τα αντιστοιχα πεζα
- $\alpha \in A$: σημαινει οτι το στοιχειο α ανηκει στο συνολο Α
  $\alpha \notin A$: σημαινει οτι το στοιχειο α δεν ανηκει στο συνολο Α
- "καλα ορισμενα" [αυστηρα καθορισμενα]: σημαινει οτι μπορουμε να αναγνωρισουμε τα στοιχεια του συνολου
- " διακρινονται με σαφηνεια το ενα απο το αλλο " : σημαινει οτι τα στοιχεια του συνολου δεν ειναι ακριβως ιδια

... Υποσυνολα του $\mathbb{R}$



- Το συνολο των φ υ σ ι κ ω ν :
  $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Το συνολο των α κ ε ρ α ι ω ν :
  $\mathbb{Z}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$
- Το συνολο των ρ η τ ω ν :
  $\mathbb{Q}=\{\rho \mid \rho=\frac{\mu}{\nu}$, με $\mu\in\mathbb{Z}$ και $\nu\in\mathbb{Z}^*\}$
- Το συνολο των α ρ ρ η τ ω ν :
  { x | το x σε δεκαδικη μορφη εχει απειρα δεκαδικα σημεια με μη περιοδικο τμημα }
- Το συνολο των π ρ α γ μ α τ ι κ ω ν αριθμων $\mathbb{R}$:
  ειναι η ενωση του συνολου των ρητων και αρρητων αριθμων.
- Το συνολο των π ε ρ ι τ τ ω ν αριθμων:
  $\{1, 3, 5, \ldots\}$ η $\{2\nu+1$ η $2\nu-1,\ \nu\in\mathbb{N}\}$
- Το συνολο των α ρ τ ι ω ν αριθμων:
  $\{0, 2, 4, \ldots\}$ η $\{2\nu,\ \nu\in\mathbb{N}\}$
- $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$, $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}$, $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}-\{0\}$, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$

... Παρασταση Συνολου

Ενα συνολο παριστανεται με τους ακολουθους τροπους :

- **Με αναγραφη των στοιχειων του**
  - Αν τα στοιχεια του συνολου ειναι λιγα
    Γραφουμε ολα τα στοιχεια του συνολου (ενα – ενα και μια φορα το καθενα) αναμεσα σε δυο αγκιστρα (χωρις να μας ενδιαφερει η σειρα), χωρισμενα με κομμα
    Παραδειγμα: Αν το συνολο Α περιεχει τα στοιχεια α, β και γ γραφεται Α={α, β, γ}
  - Αν τα στοιχεια του συνολου ειναι πολλα
    Γραφουμε μερικα απ'τα στοιχεια του συνολου και αποσιωπουμε τα υπολοιπα, αρκει να ειναι σαφες ποια ειναι αυτα που παραλειπονται (συνηθως τα στοιχεια αποτελουν καποια γνωστη σειρα, οποτε γραφουμε 2-3 πρωτα, αποσιωπητικα και το τελευταιο) αναμεσα σε δυο αγκιστρα ...
    Παραδειγμα: Αν το συνολο Β περιεχει τους περιττους απ'το 1 ως το 51 γραφεται: Β={1, 3, 5, ..., 51}
  - Αν τα στοιχεια του συνολου ειναι απειρα
    Γραφουμε μερικα απ'τα στοιχεια του συνολου και αποσιωπουμε τα υπολοιπα, αρκει να ειναι σαφες ποια ειναι αυτα που παραλειπονται (συνηθως τα στοιχεια αποτελουν καποια γνωστη σειρα, οποτε γραφουμε 2-3 πρωτα και αποσιωπητικα) αναμεσα σε δυο αγκιστρα ...
    Παραδειγμα: Αν το συνολο Γ περιεχει ολους τους φυσικους αριθμους γραφεται: Γ={0, 1, 2, ...}
- **Με περιγραφη των στοιχειων του**
  Αναφερουμε μια χαρακτηριστικη ιδιοτητα των στοιχειων του συνολου, που να εξασφαλιζει ομως οτι αυτα ειναι καλα καθορισμενα και διακρινονται μεταξυ τους.
  Δηλαδη, αν απο ενα συνολο Ω επιλεγουμε εκεινα τα στοιχεια του, που εχουν μια ορισμενη ιδιοτητα Ι, εχουμε ενα νεο συνολο Α που
  - συμβολιζεται : $A=\{x\in\Omega \mid x$ εχει την ιδιοτητα $I\}$
  - διαβαζεται : "Το συνολο των $x\in\Omega$ για τα οποια ο x εχει την ιδιοτητα Ι"

  Παραδειγμα: Αν το συνολο Α περιεχει ολους τους περιττους ακεραιους αριθμους, γραφεται: $A=\{\ x\in\mathbb{Z} \mid x$ ειναι περιττος$\}$

... Ισοτητα Συνολων

Ισα συνολα: λεγονται δυο συνολα Α και Β οταν αυτα εχουν ακριβως τα ιδια στοιχεια. Συμβολιζουμε με: **Α=Β**

Α λ λ ι ω ς

Δυο συνολα Α και Β λεγονται ισα, οταν καθε στοιχειο του συνολου Α ειναι και στοιχειο του συνολου Β και αντιστροφα, καθε στοιχειο του συνολου Β ειναι και στοιχειο του συνολου Α

... Υποσυνολο Συνολου

Υποσυνολο ενος συνολου Α λεγεται ενα συνολο Β , οταν καθε στοιχειο του συνολου Β ανηκει στο συνολο Α
Συμβολιζουμε με : **$B \subseteq A$**

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ

- $A \subseteq A$, για καθε συνολο Α
- $\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ \text{και} \\ B \subseteq \Gamma \end{matrix}\right| \rightarrow A \subseteq \Gamma$
- $\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ \text{και} \\ B \subseteq A \end{matrix}\right| \rightarrow A = B$

... Κενο Συνολο

Κενο συνολο λεγεται το συνολο που δεν περιεχει κανενα στοιχειο
Συμβολιζουμε με: **$\varnothing$** η **{}**

ΣΧΟΛΙΟ
Το κενο συνολο ειναι μοναδικο και θεωρειται υποσυνολο καθε συνολου

... Ισοτητα Συνολων

Βασικο συνολο λεγεται το ευρυτερο συνολο , με τα υποσυνολα του οποιου εργαζομαστε
Συμβολιζουμε (συνηθως) με : **Ω**

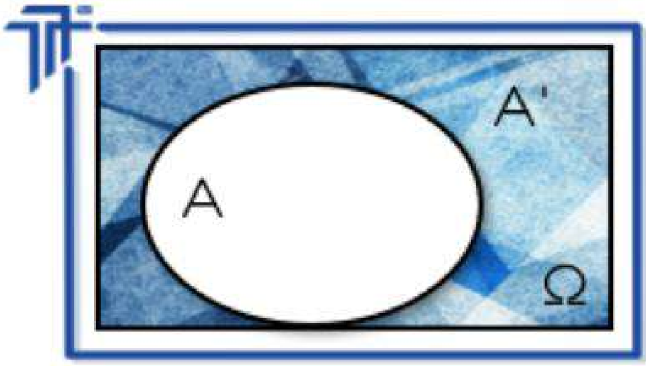
ΣΧΟΛΙΟ

Τα **διαγραμματα Venn** ειναι μια εποπτικη παρουσιαση των συνολων οπου

- το βασικο συνολο Ω συμβολιζεται με ενα ορθογωνιο
- ενα συνολο $A \subseteq \Omega$ συμβολιζεται με μια κλειστη καμπυλη γραμμη μεσα στο ορθογωνιο, με στοιχεια οσα στοιχεια του βασικου συνολου περικλειονται μεσα στη κλειστη καμπυλη γραμμη .
- μεσα στο ορθογωνιο που παριστανει το βασικο συνολο Ω μπορουμε να παραστησουμε (με κλειστες καμπυλες) ολα τα υποσυνολα του Ω με τα οποια εργαζομαστε

Συμπληρωμα ενος συνολου Α λεγεται το συνολο που περιεχει εκεινα τα στοιχεια του βασικου συνολου Ω που δεν ανηκουν στο Α

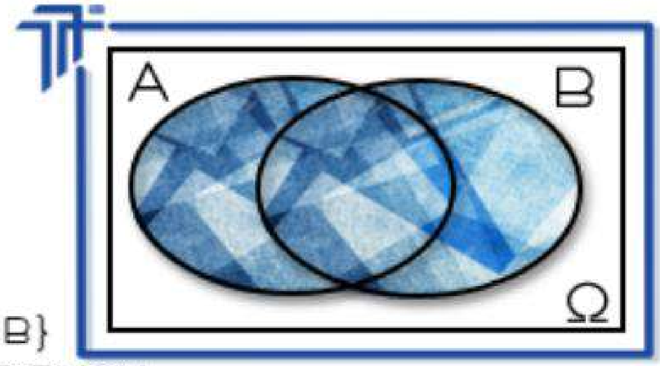
Συμβολισμος : **Α'**



- Διαβαζεται:
  - "οχι Α"
  - "αντιθετο του Α"
  - "συμπληρωμα του Α"
- Ισχυει: $A'=\{x\in\Omega \mid x\notin A\}$
- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ – ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ
  - $(A')'=A$
  - $\Omega'=\varnothing$
  - $\varnothing'=\Omega$
  - $A\cup A'=A'\cup A=\Omega$
  - $A\cap A'=A'\cap A=\varnothing$

Ενωση δυο συνολων Α , Β λεγεται το συνολο που αποτελειται απο ολα τα στοιχεια και των δυο συνολων Α , Β

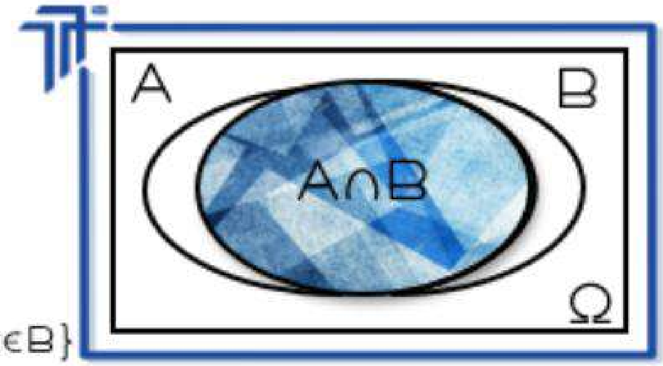
Συμβολισμος : **Α∪Β**



- Διαβαζεται:
  - " Α ενωση Β "
  - "Α η Β "
- Ισχυει: $A\cup B=\{x\in\Omega \mid x\in A$ η $x\in B\}$
- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ – ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ
  - $A\cup A=A$
  - $A\cup\Omega=\Omega$
  - $A\cup\varnothing=A$
  - $A\cup B=B\cup A$
  - $(A\cup B)\cup\Gamma=A\cup(B\cup\Gamma)$
  - $A\subseteq A\cup B$ και $B\subseteq A\cup B$
  - $A\subseteq B \rightarrow A\cup B=B \quad =\varnothing$

Τομη δυο συνολων Α , Β λεγεται το συνολο που αποτελειται απο τα κοινα στοιχεια των δυο συνολων Α , Β

Συμβολισμος : **Α∩Β**



- Διαβαζεται:
  - " Α τομη Β "
  - "Α και Β "
- Ισχυει: $A\cap B=\{x\in\Omega \mid x\in A$ και $x\in B\}$
- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ – ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ
  - $A\cap A=A$
  - $A\cap\Omega=A$
  - $A\cap\varnothing=\varnothing$
  - $A\cap B=B\cap A$
  - $(A\cap B)\cap\Gamma=A\cap(B\cap\Gamma)$
  - $A\cap B\subseteq A$ και $A\cap B\subseteq B$
  - $A\subseteq B \rightarrow A\cap B=A$

... Υποσυνολα του $\mathbb{R}$

- Το συνολο των φυσικων : $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  - Το συνολο των περιττων :
    $\{1, 3, 5, \ldots\}$ ή $\{2\nu+1 \mid$ οπου $\nu \in \mathbb{N}\}$
  - Το συνολο των αρτιων :
    $\{0, 2, 4, \ldots\}$ ή $\{2\nu \mid$ οπου $\nu \in \mathbb{N}\}$
  - $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\} \to$ φυσικοι χωρις το μηδεν

- Το συνολο των ακεραιων : $\mathbb{Z}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
  - $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\} \to$ ακεραιοι χωρις το μηδεν
  - $\mathbb{Z}_+=\{0, 1, 2, 3, \ldots\} \to$ θετικοι ακεραιοι
  - $\mathbb{Z}_-=\{\ldots, -3, -2, -1, 0\} \to$ αρνητικοι ακεραιοι
  - $\mathbb{Z}^*_+=\{1, 2, 3, \ldots\} \to$ θετικοι ακεραιοι χωρις το μηδεν
  - $\mathbb{Z}^*_-=\{\ldots, -3, -2, -1\} \to$ αρνητικοι ακεραιοι χωρις το μηδεν

- Το συνολο των ρητων : $\mathbb{Q}=\{\rho \mid \rho=\frac{\mu}{\nu}$, με $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{Z}^*\}$
  - $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}-\{0\} \to$ ρητοι χωρις το μηδεν
  - Οι ακεραιοι ειναι υποσυνολο των ρητων
  - Οι δεκαδικοι με απειρα δεκαδικα ψηφια που παρουσιαζουν περιοδικοτητα ειναι ρητοι

- Το συνολο των αρρητων :
  { x | το x σε δεκαδικη μορφη εχει απειρα δεκαδικα σημεια με μη περιοδικο τμημα }
  π.χ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e
  (δεν μπορουν να γραφουν σαν δεκαδικοι η σαν περιοδικοι δεκαδικοι)

- Το συνολο των πραγματικων αριθμων $\mathbb{R}$:
  ειναι η ενωση του συνολου των ρητων και αρρητων αριθμων.
  - $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\} \to$ πραγματικοι χωρις το μηδεν

Ιδιοτητες Προσθεσης – Πολλαπλασιασμου

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ
Αντιμεταθετικη	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
Προσεταιριστικη	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
Επιμεριστικη	$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$	
Ουδετερο στοιχειο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντιθετος (προσθεση) Αντιστροφος (πολ/σμος)	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \ \alpha\neq 0$

ΣΧΟΛΙΑ

- Ο αριθμος 0 λεγεται ουδετερο στοιχειο της προσθεσης (δεν μεταβαλλεται ενας αριθμος αν του προσθεσουμε το 0)
- Ο αριθμος 1 λεγεται ουδετερο στοιχειο του πολλαπλασιασμου (δεν μεταβαλλεται ενας αριθμος αν τον πολλαπλασιασουμε επι 1)
- Τα γραμματα α, β και γ στο παραπανω πινακα, παριστανουν οποιουσδηποτε πραγματικους αριθμους
- Η αντιμεταθετικη ιδιοτητα της προσθεσης (πολλαπλασιασμου) ισχυει και για περισσοτερους των δυο προσθετεων (παραγοντων). Δηλαδη καθε αθροισμα (γινομενο) με περισσοτερους απο δυο προσθετεους (παραγοντες) ειναι ισο με οποιοδηποτε αλλο αθροισμα (γινομενο) με τους ιδιους προσθετεους (παραγοντες) με οποιαδηποτε σειρα και αν τους παρουμε
- Για την προσεταιριστικη ιδιοτητα της προσθεσης (πολλαπλασιασμου) ισχυουν τα ιδια με την αντιμεταθετικη ιδιοτητα
- Η **αφαιρεση** οριζεται μεσω της προσθεσης: $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$
- Η **διαιρεση** οριζεται μεσω του πολλαπλασιασμου:
  $\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta},\ \beta\neq 0$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

- $\left.\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\gamma=\beta+\delta\\ \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\delta\end{cases}$
- $\alpha\cdot 0=0$
- $\alpha\cdot\beta\neq 0\Leftrightarrow\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$
- $(-\alpha)\cdot\beta=-\alpha\cdot\beta$
- $-(\alpha+\beta)=-\alpha-\beta$
- $\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta\pm\beta\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\alpha=\beta\Rightarrow\begin{cases}\alpha\pm\gamma=\beta\pm\gamma\\ \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma,\ \ \gamma\neq 0\end{cases}$
- $\alpha\cdot\beta=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\beta=0$
- $\alpha\cdot(-1)=-\alpha$
- $(-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\cdot\beta$
- $\frac{\alpha}{\gamma}\pm\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\pm\beta}{\gamma},\ \gamma\neq 0$
- $\frac{1}{\alpha\cdot\beta}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta},\ \alpha\cdot\beta\neq 0$

... Αναλογιες

ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Λογος** του α ως προς β λεγεται το πηλικο $\frac{\alpha}{\beta}$
- **Αναλογια** λεγεται η ισοτητα δυο λογων, εστω: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$
  - Οι αριθμοι α,β,γ,δ λεγονται **οροι** της αναλογιας
  - Οι αριθμοι α,δ λεγονται **ακροι** οροι της αναλογιας
  - Οι αριθμοι β,γ λεγονται **μεσο**ι οροι της αναλογιας
  - Στη περιπτωση που η αναλογια ειναι της μορφης $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$

    ο αριθμος β λεγεται **μεσος αναλογος** των α και γ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$ $\quad [\beta\cdot\delta\neq 0]$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ $\quad [\beta\cdot\gamma\cdot\delta\neq 0]$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ $\quad [\alpha\cdot\beta\cdot\delta\neq 0]$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$ $\quad [\beta\cdot\delta\neq 0]$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ $\quad [\beta\cdot\delta\cdot(\beta+\delta)\neq 0]$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\gamma-\delta}$ $\quad [\beta\cdot\delta\neq 0, \alpha\neq\beta, \gamma\neq\delta]$

... Δυναμεις

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Για καθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{Z}_+^*$ οριζουμε **ν–οστη δυναμη του α** τον αριθμο $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ με : $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παραγοντες}}$, $\nu > 1$
- Για καθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $\nu \in \mathbb{Z}^*$ οριζουμε : $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$ και $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}}$
- Αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ και $\mu \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^*$ οριζουμε : $\boldsymbol{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$
- Αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ και x πραγματικος τοτε οριζεται η δυναμη α^x και ειναι $\alpha^x > 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

- $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$
- $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$
- $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$
- $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \dfrac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}$
- $(-\alpha)^{2\kappa} = \alpha^{2\kappa}$
- $(-\alpha)^{2\kappa+1} = -\alpha^{2\kappa+1}$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν $\alpha=\beta$ τοτε $\alpha \cdot \nu = \beta \cdot \nu$
Το αντιστροφο δεν ισχυει

- $(a\pm\beta)^2=a^2\pm2\cdot a\cdot\beta+\beta^2 \quad (a^2+\beta^2=(a+\beta)^2-2\cdot a\cdot\beta)$
- $a^2-\beta^2=(a+\beta)(a-\beta)$
- $(a+\beta+\gamma)^2=a^2+\beta^2+\gamma^2+2\cdot a\cdot\beta+2\cdot a\cdot\gamma+2\cdot\beta\cdot\gamma$
- $a^3\pm\beta^3=(a+\beta)(a^2\mp a\cdot\beta+\beta^2)=(a\pm\beta)^3\mp3\cdot a\cdot\beta\cdot(a\pm\beta)$
- $(a\pm\beta)^3=a^3\pm3\cdot a^2\cdot\beta+3\cdot a\cdot\beta^2\pm\beta^3$
- $(a+\beta)^4=a^4+4\cdot a^3\cdot\beta+6\cdot a^2\cdot\beta^2+4\cdot a\cdot\beta^3+\beta^4$
- $(a-\beta)^5=a^5-5\cdot a^4\cdot\beta+10\cdot a^3\cdot\beta^2-10\cdot a^2\cdot\beta^3+5\cdot a\cdot\beta^4-\beta^5$
- $a^\nu-\beta^\nu=(a-\beta)(a^{\nu-1}+a^{\nu-2}\cdot\beta+\ldots+a\cdot\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$
- $a^2+\beta^2+\gamma^2-a\beta-a\gamma-\beta\gamma=\frac{1}{2}[(a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-a)^2]$
- $a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma=(a+\beta+\gamma)(a^2+\beta^2+\gamma^2-a\beta-a\gamma-\beta\gamma)$

$$=\frac{1}{2}(a+\beta+\gamma)[(a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-a)^2]$$

- $a^3+\beta^3+\gamma^3=3\cdot a\cdot\beta\cdot\gamma$, αν $a+\beta+\gamma=0$ ή $a=\beta=\gamma$ (Euler)

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ο αριθμος α λεγεται μ ε γ α λ υ τ ε ρ ο ς απ'τον αριθμο β, αν και μονο η διαφορα $\alpha-\beta$ ειναι θετικος αριθμος $(\alpha-\beta>0)$.
  Συμβολιζουμε: $\alpha>\beta$ $\quad$ $(\boldsymbol{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0})$

- Ο αριθμος α λεγεται μ ι κ ρ ο τ ε ρ ο ς απ'τον αριθμο β, αν και μονο η διαφορα $\alpha-\beta$ ειναι αρνητικος αριθμος $(\alpha-\beta<0)$.
  Συμβολιζουμε: $\alpha<\beta$ $\quad$ $(\boldsymbol{\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0})$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

- Αν $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$, τοτε: $\alpha>\gamma$
- Αν $\alpha>\beta$, τοτε: $\alpha\pm\gamma>\beta\pm\gamma$
- Αν $\gamma>0$, τοτε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma \\ \dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma} \end{cases}$
- Αν $\gamma<0$, τοτε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$
- Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$, τοτε: $\alpha+\gamma>\beta+\delta$
- Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$, τοτε: $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοι αριθμοι).
- Αν α,β θετικοι και $\nu\in\mathbb{N}^*$, τοτε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu>\beta^\nu$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΡΟΣΗΜΟΥ

- Αν $\left.\begin{matrix}\alpha>0 \\ \text{και} \\ \beta>0\end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha+\beta>0$
- Αν $\left.\begin{matrix}\alpha<0 \\ \text{και} \\ \beta<0\end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha+\beta<0$
- Αν α,β ομοσημοι $\rightarrow \begin{cases} \alpha\beta>0 \\ \text{και} \\ \dfrac{\alpha}{\beta}>0 \end{cases}$
- Αν α,β ετεροσημοι $\rightarrow \begin{cases} \alpha\beta<0 \\ \text{και} \\ \dfrac{\alpha}{\beta}<0 \end{cases}$
- $\alpha^2\geq 0$, με την ισοτητα να ισχυει για $\alpha=0$

ΣΧΟΛΙΑ

- Ο αριθμος α βρισκεται δ ε ξ ι ο τ ε ρ α του β στον αξονα των πραγματικων, αν $\alpha>\beta$
- Ο αριθμος α βρισκεται α ρ ι σ τ ε ρ ο τ ε ρ α του β στον αξονα των πραγματικων, αν $\alpha<\beta$
- Καθε αρνητικος αριθμος ειναι μικροτερος του μηδενος
- Καθε θετικος αριθμος ειναι μεγαλυτερος του μηδενος
- Δεν αφαιρουμε ουτε διαιρουμε ανισοτητες κατα μελη

... Διαστηματα

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ
a β x	$a \le x \le \beta$	$[a, \beta]$
a β x	$a \le x < \beta$	$[a, \beta)$
a β x	$a < x \le \beta$	$(a, \beta]$
a β x	$a < x < \beta$	(a, β)
a x	$x \ge a$	$[a, +\infty)$
a x	$x > a$	$(a, +\infty)$
a x	$x \le a$	$(-\infty, a]$
a x	$x < a$	$(-\infty, a)$

ΣΧΟΛΙΑ

- Τα συμβολα $-\infty$, $+\infty$ (πλην απειρο, συν απειρο) **δεν** παριστανουν πραγματικους αριθμους.
  Δειχνουν **κατευθυνση** στον αξονα των πραγματικων αριθμων
- Το συνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων παριστανεται και $(-\infty, +\infty)$
- Τα ακρα $(-\infty, \ldots$ και $\ldots, +\infty)$ ειναι παντα ανοικτα

ΟΡΙΣΜΟΙ

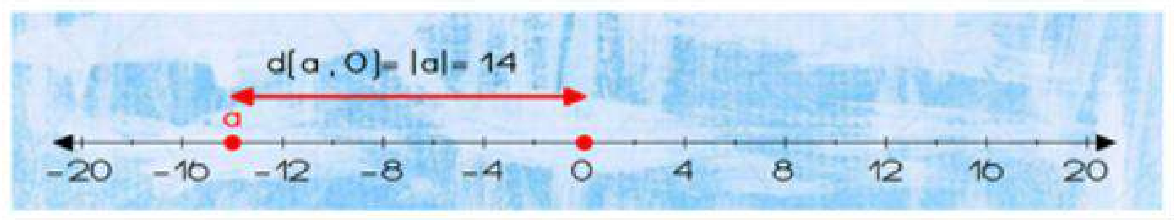
- Ονομαζουμε **απολυτη τιμη** του πραγματικου αριθμου α, την αποσταση του απο το 0 στον αξονα των πραγματικων αριθμων.

  Συμβολιζεται: **| α |**

  Παρατηρηση:

  Την αποσταση ενος σημειου α απο το 0, τη συμβολιζουμε με "**d[α, 0]**".

  Ετσι, **d[α, 0]=|α|**



- Για καθε πραγματικο αριθμο α οριζουμε την απολυτη τιμη του ως:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha \ , & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

που σημαινει οτι

- αν ο α ειναι θετικος (α> 0) τοτε: | α|=α
- αν ο α ειναι αρνητικος (α< 0) τοτε: | α|=−α
- αν ο α ειναι το 0 (α=0) τοτε: | α|= 0
- η απολυτη τιμη του α ειναι ο μεγαλυτερος απο τους αριθμους − α, α :

  | α |=max{−α, α}

... Συνεπειες ... Ορισμου ...

... 1. **$|a| \geq 0$**, για καθε $a \in \mathbb{R}$

η απολυτη τιμη του α ειναι μη αρνητικος αριθμος και προκυπτει αμεσα απο τον ορισμο
(η αποσταση του α απο το 0, ειτε ειναι αριστερα του ειτε δεξια του, ειναι μη αρνητικος αριθμος)

... 2. **$|-a| = |a|$**, για καθε $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } a>0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} |a| = a \\ |-a| \overset{-a<0}{=} a \end{array}\right\} \Rightarrow |a| = |-a| \\ \text{Αν } a=0 \rightarrow |0| = |0| \Rightarrow |a| = |-a| \\ \text{Αν } a<0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} |a| = -a \\ |-a| \overset{-a>0}{=} -a \end{array}\right\} \Rightarrow |a| = |-a| \end{array}\right\} \rightarrow |-a| = |a|$$

... 3. **$-|a| \leq a \leq |a|$**, για καθε $a \in \mathbb{R}$

Ειναι, για καθε $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} |a| \geq -a \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a>0 \rightarrow \mathbf{|a|} = a > \mathbf{-a} \\ a=0 \rightarrow \mathbf{|0| = 0} \text{ (ισχυει το "=")} \\ a<0 \rightarrow \mathbf{|a| = -a} \text{ (ισχυει το "=")} \end{array}\right. \\ |a| \geq a \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a>0 \rightarrow \mathbf{|a| = a} \text{ (ισχυει το "=")} \\ a=0 \rightarrow \mathbf{|0| = 0} \text{ (ισχυει το "=")} \\ a<0 \rightarrow \mathbf{|a|} = -a > 0 > \mathbf{a} \end{array}\right. \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -|a| \leq a \\ |a| \geq a \end{array}\right\} \rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$$

... 4. **$|a|^2 = a^2$**, για καθε $a \in \mathbb{R}$

Ειναι, για καθε $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{αν } a>0 \rightarrow |a| = a \text{ και } \mathbf{|a|^2} = a \cdot a = \mathbf{a^2} \\ \text{αν } a=0 \rightarrow |a| = a \text{ και } a^2 = 0 \text{ οποτε } \mathbf{|a|^2 = a^2} \\ \text{αν } a<0 \rightarrow |a| = -a \text{ και } \mathbf{|a|^2} = (-a)\cdot(-a) = \mathbf{a^2} \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{|a|^2 = a^2}$$

Συνεπεια

$|a| = \sqrt{a^2}$, για καθε $a \in \mathbb{R}$, αφου

$$|a|^2 = a^2 \rightarrow \left.\begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} \\ \text{η} \\ |a| = -\sqrt{a^2} \text{ (αδυνατη αφου } |a| \geq 0) \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{|a| = \sqrt{a^2}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Προσοχη $\sqrt{a^2} \neq \sqrt{a}^2$, αφου για να οριζεται το $\sqrt{a}^2$ προυποθεση να ειναι $a \geq 0$, οποτε $\sqrt{a^2} = |a|$ ενω $\sqrt{a}^2 = a$

ΣΧΟΛΙΑ

Για τους πραγματικους αριθμους α και β ισχυει

... **$|a| < |\beta| \Leftrightarrow a^2 < \beta^2$**, για καθε $a \in \mathbb{R}$ αφου, $|a| < |\beta| \underset{|\beta| \geq 0}{\overset{|a| \geq 0}{\Leftrightarrow}} |a|^2 < |\beta|^2$

... **$|a| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ και $\beta = 0$**, αφου, $|a| + |\beta| \underset{|\beta| \geq 0}{\overset{|a| \geq 0}{\geq}} 0$ με την ισοτητα να ισχυει για $a = \beta = 0$

... Ιδιοτητες Απολυτων

... 1. $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, για καθε $\alpha\in\mathbb{R}$

$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta| \overset{|\alpha\beta|\geq 0}{\underset{|\alpha|\cdot|\beta|\geq 0}{\Leftrightarrow}} |\alpha\cdot\beta|^2=(|\alpha|\cdot|\beta|)^2 \Leftrightarrow \alpha^2\cdot\beta^2=\alpha^2\cdot\beta^2$, που αληθευει

Γενικα ισχυει

... $|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu|=|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot\ldots\cdot|\alpha_\nu|$ με $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in\mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}$

Συνεπεια: $|\alpha^\nu|=|\alpha|^\nu$, για καθε $\alpha\in\mathbb{R}$

... 2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, για καθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\beta\neq 0$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|} \overset{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\geq 0}{\underset{|\alpha|\cdot|\beta|\geq 0}{\Leftrightarrow}} \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2=\left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\alpha^2}{\beta^2} \text{ που αληθευει}$$

... 3. Αν $\theta>0$, ισχυει: $|x|=\theta \Leftrightarrow x=-\theta$ **η** $x=\theta$

$$|x|=\theta \overset{|x|\geq 0}{\underset{\theta>0}{\Leftrightarrow}} |x|^2=\theta^2 \Leftrightarrow x^2=\theta^2 \Leftrightarrow x^2-\theta^2=0 \Leftrightarrow (x-\theta)(x+\theta)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\theta \\ \text{η} \\ x=\theta \end{cases}$$

Γεωμετρικη ερμηνεια

Ειναι για $\theta>0$

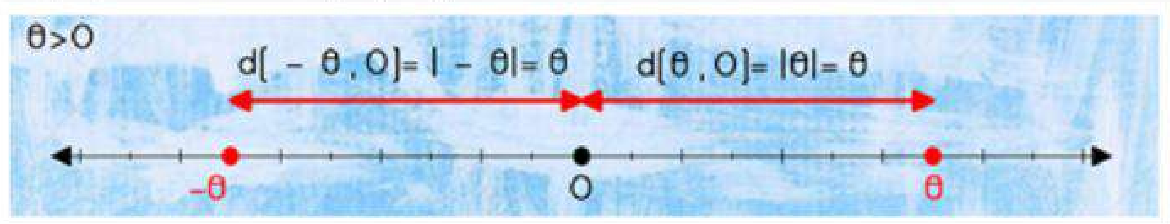
$|x|=\theta \quad \Rightarrow d(x, 0)=\theta$ (ο x απεχει απο το 0 αποσταση ιση με θ)

Δηλαδη ο x βρισκεται σε αποσταση θ απο το 0.

Απεχουν αποσταση θ απ' το 0 τα σημεια του αξονα:

$-\theta$ (αριστερα του 0) και θ (δεξια του 0) αφου $|-\theta|=|\theta|=\theta$ (σχημα)

Αρα, οι δυνατες τιμες του x ειναι: $x=-\theta$ η $x=\theta$.



... 4. Αν $\alpha\in\mathbb{R}$, ισχυει: $|x|=|\alpha| \Leftrightarrow x=-\alpha$ **η** $x=\alpha$

$$|x|=|\alpha| \overset{|x|\geq 0}{\underset{|\alpha|\geq 0}{\Leftrightarrow}} |x|^2=|\alpha|^2 \Leftrightarrow x^2=\alpha^2 \Leftrightarrow x^2-\alpha^2=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x+\alpha)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ \text{η} \\ x=\alpha \end{cases}$$

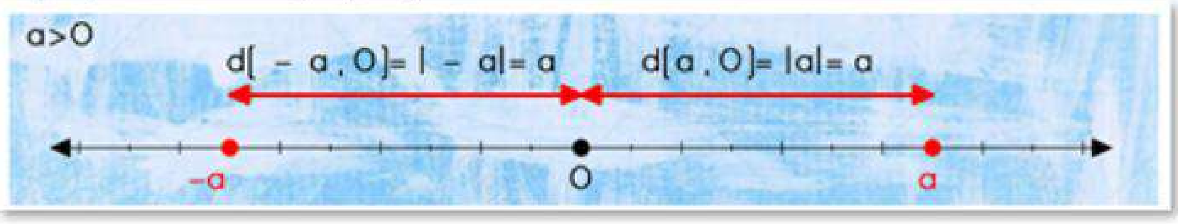
Γεωμετρικη ερμηνεια

Ειναι για καθε α (ο α μπορει να ειναι αρνητικος η μη αρνητικος)

$|x|=|\alpha|$ $d(x,0)=|\alpha|$ (ο x απεχει απο το 0 αποσταση ιση με $|\alpha|>0$)

Δηλαδη ο x βρισκεται σε αποσταση $|\alpha|$ απο το 0. Απεχουν απο-σταση $|\alpha|$ απο το 0 τα σημεια του αξονα $-\alpha$ (αριστερα του 0) και α (δεξια του 0), συμφωνα με το (3), αφου $|-\alpha|=|\alpha|=\alpha$ (σχημα).

Αρα, οι δυνατες τιμες του x ειναι: $x=-\alpha$ η $x=\alpha$



... Θεωρημα 1

Αν $\theta>0$ και $x\in\mathbb{R}$, ισχυει: $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$

Αποδειξη

$$|x|<\theta \underset{\theta>0}{\overset{|x|>0}{\Leftrightarrow}} |x|^2<\theta^2 \Leftrightarrow x^2<\theta^2 \Leftrightarrow x^2-\theta^2<0 \Leftrightarrow [x-\theta][x+\theta]<0$$

$$\underset{[x-\theta]<[x+\theta]}{\overset{[x-\theta],\,[x+\theta]\ \text{ετεροσημοι}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x+\theta>0 \\ \text{και} \\ x-\theta<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\theta \\ \text{και} \\ x<\theta \end{cases} \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$$

Γεωμετρικη ερμηνεια

Ειναι για καθε x και $\theta>0$

$|x|<\theta \Rightarrow d[x, 0]<\theta$

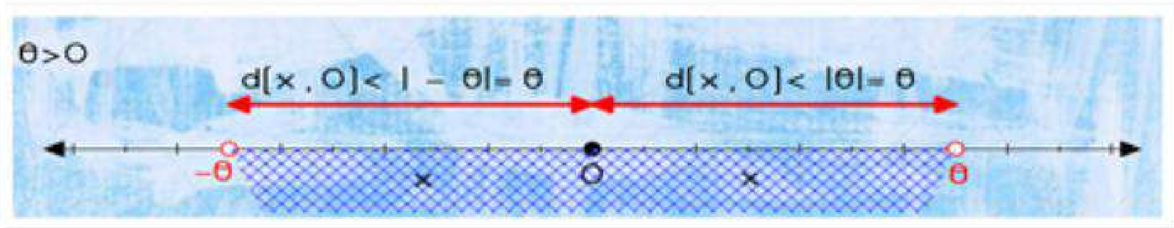
[ο x απεχει απο το 0 αποσταση μικροτερη του $\theta>0$]

Δηλαδη ο x βρισκεται σε αποσταση μικροτερη του θ απο το 0.

Απεχουν αποσταση θ απο το 0 τα σημεια του αξονα

− θ [αριστερα του 0] και θ [δεξια του 0] [σχημα].

Δηλαδη ο πραγματικος αριθμος x βρισκεται εντος του διαστηματος [−θ, θ] και προφανως ισχυει $-\theta<x<\theta$.



... Θεωρημα 2

Αν $\theta>0$ και $x\in\mathbb{R}$, ισχυει: $|x|>\theta \Leftrightarrow x<-\theta$ η $x>\theta$

Αποδειξη

Ειναι

$$|x|>\theta \underset{\theta>0}{\overset{|x|>0}{\Leftrightarrow}} |x|^2>\theta^2 \Leftrightarrow x^2>\theta^2 \Leftrightarrow x^2-\theta^2>0 \Leftrightarrow (x-\theta)(x+\theta)>0$$

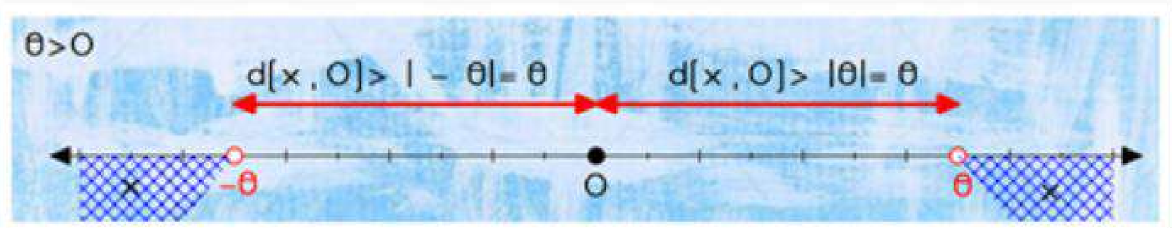
$$\underset{(x-\theta)<(x+\theta)}{\overset{(x-\theta),\ (x+\theta)\ \text{ομοσημοι}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \begin{cases} x+\theta>0 \\ \text{και} \\ x-\theta>0 \end{cases} \\ \text{η} \\ \begin{cases} x+\theta<0 \\ \text{και} \\ x-\theta<0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x>-\theta \\ \text{και} \\ x>\theta \end{cases} \Leftrightarrow x>\theta \\ \text{η} \\ \begin{cases} x<-\theta \\ \text{και} \\ x<\theta \end{cases} \Leftrightarrow x<-\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x>\theta} \\ \text{η} \\ \mathbf{x<-\theta} \end{cases}$$

Γεωμετρικη ερμηνεια

Ειναι για καθε $x\in\mathbb{R}$ και $\theta>0$

$|x|>\theta \Rightarrow d(x,0)>\theta$ (ο x απεχει απ'το 0 αποσταση μεγαλυτερη του $\theta>0$)

Δηλαδη ο x βρισκεται σε αποσταση μ εγαλυτερη του θ απο το 0.
Απεχουν αποσταση θ απο το 0 τα σημεια του α ξονα
$-\theta$ (αριστερα του 0) και θ (δεξια του 0) (σχημα).
Δηλαδη ο πραγματικος αριθμος x βρισκεται εκτος του διαστηματος $[-\theta, \theta]$, δηλαδη στα διαστηματα $(-\infty, \theta)$ η $(\theta,+\infty)$ και προφανως ισχυει $x<-\theta$ η $x>\theta$.



... Τριγωνικη Ανισοτητα

Για καθε α,β∈ℝ, ισχυει: $\mathbf{||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|}$

Αποδειξη

Ειναι, για καθε α,β∈ℝ

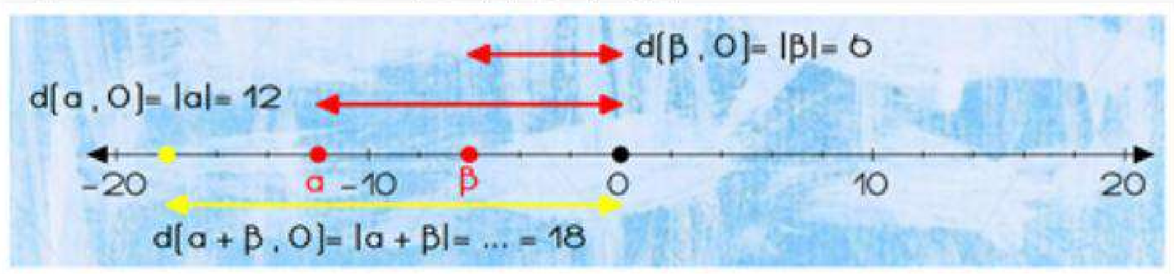
$$\left.\begin{array}{l} -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \\ -|\beta| \leq \beta \leq |\beta| \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -(|\alpha|+|\beta|) \leq \alpha+\beta \leq |\alpha|+|\beta| \Rightarrow \mathbf{|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|} \quad (1)$$

Γενικα ισχυει

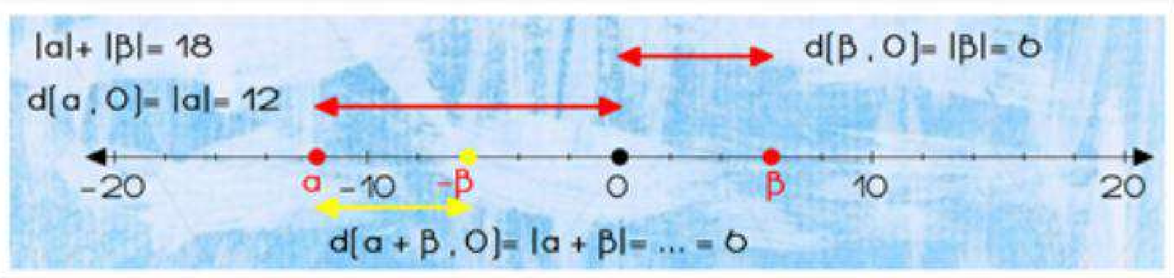
... $\mathbf{|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu| \leq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|}$ με $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$

Σχολιο

- Η ισοτητα ισχυει οταν οι πραγματικοι αριθμοι α και β ειναι ομοσημοι. Δηλαδη ισχυει: $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$



- Αν οι πραγματικοι αριθμοι α και β ειναι ετεροσημοι ισχυει: $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$



Ομοια, εστω, για καθε α,β∈ℝ

$$||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha+\beta| \underset{||\alpha|-|\beta||\geq 0}{\overset{|\alpha+\beta|\geq 0}{\Leftrightarrow}} ||\alpha|-|\beta||^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2 \Rightarrow$$

$$|\alpha|^2 - 2|\alpha|\cdot|\beta| + |\beta|^2 \leq (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2|\alpha\beta| + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow -|\alpha\beta| \leq \alpha\beta$$

που αληθευει

Αρα, ισοδυναμα: $\mathbf{||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha+\beta|} \quad (2)$

Σχολιο

- Η ισοτητα ισχυει οταν οι πραγματικοι αριθμοι α και β ειναι ετεροσημοι. Δηλαδη ισχυει: $|\alpha+\beta|=|\alpha|-|\beta|$
- Αν οι πραγματικοι αριθμοι α και β ειναι ομοσημοι ισχυει: $||\alpha|-|\beta||<|\alpha+\beta|$

Τελικα απο τις (1) και (2) και για καθε α,β∈ℝ, προκυπτει

$\mathbf{||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|}$

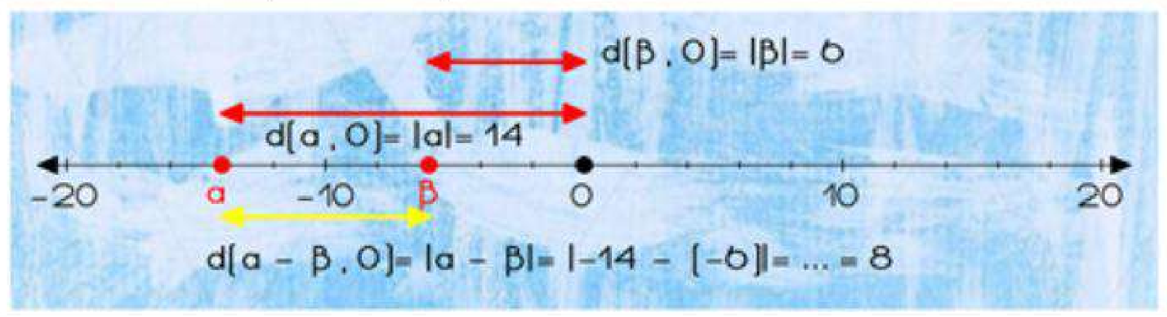
- Αν στη τριγωνομετρικη ανισοτητα αντικαταστησουμε το β με − β, τοτε προκυπτει

  $\mathbf{||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha-\beta| \leq |\alpha|+|\beta|}$

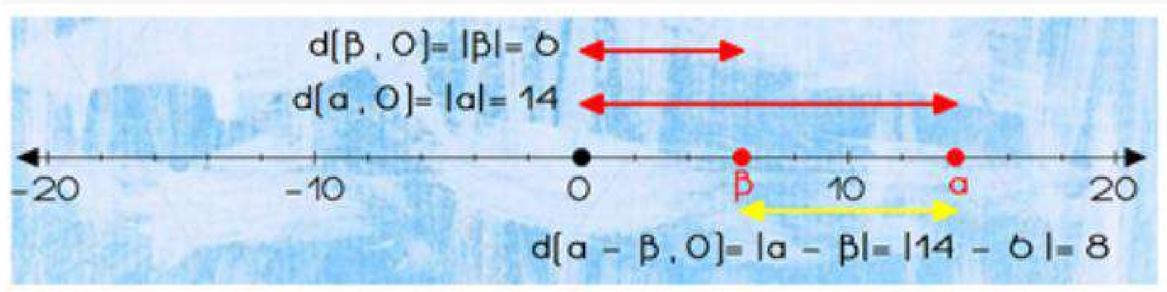
... Αποσταση Δυο Αριθμων (1)

- Ονομαζουμε **αποσταση** των πραγματικων αριθμων α και β, τον αριθμο **|α−β|**
  Συμβολιζεται: **d(α, β)**
  Δηλαδη
  d(α, β)= |α−β|=|β−α|, για καθε α,β∈ℝ

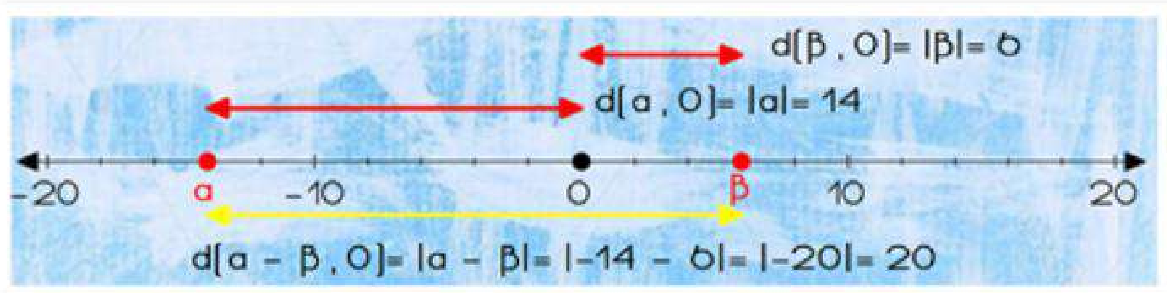
- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
  - Αν οι πραγματικοι αριθμοι α και β βρισκονται αριστερα του 0 (α, β<0) τοτε η αποσταση τους ισουται με τη διαφορα των απολυτων τιμων τους



  - Αν οι πραγματικοι αριθμοι α και β βρισκονται δεξια του 0 (α,β>0) τοτε η αποσταση τους ισουται με τη διαφορα των απολυτων τι μων τους



  - Αν οι πραγματικοι αριθμοι α και β βρισκονται εκατερωθεν του 0 (α, β ετεροσημοι) τοτε η αποσταση τους ισουται με το αθροισμα των απολυτων τιμων τους



  - Ισχυει: d(α, β)=d(β, α) για καθε α, β∈ℝ
  - Η αποσταση των πραγματικων αριθμων α και β λεγεται **μηκος** του διαστηματος [α, β].
    - αν α < β Ισχυει: d(α, β)= β−α
    - αν α > β Ισχυει: d(α, β)= α−β

... Αποσταση Δυο Αριθμων (2)

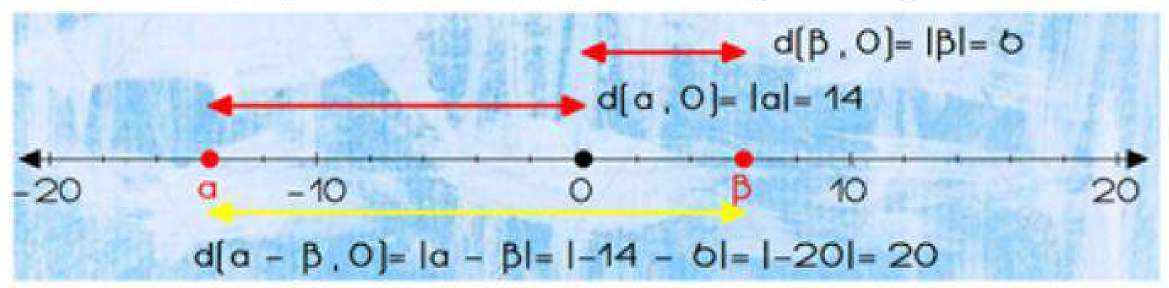
- Εστω $M(x_0, 0)$ ειναι το μεσο του τμηματος ΑΒ, οπου $A(\alpha, 0)$ και $B(\beta, 0)$ σημεια του αξονα x'x.
  Τοτε

  $$(MA)=(MB)\Leftrightarrow d(x_0,\alpha)=d(x_0,\beta)\Leftrightarrow |x_0-\alpha|=|x_0-\beta| \overset{\alpha<x_0<\beta}{\Leftrightarrow} x_0-\alpha=\beta-x_0$$

  $$\Leftrightarrow 2x_0=\alpha+\beta \Leftrightarrow x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

  - ο αριθμος $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$ λεγεται **κεντρο** του διαστηματος $[\alpha, \beta]$
  - ο αριθμος $\rho=\frac{\beta-\alpha}{2}$ λεγεται **ακτινα** του διαστηματος $[\alpha, \beta]$

  Σ χ ο λ ι ο
  Το μηκος, η ακτινα και το κεντρο του διαστηματος $[\alpha, \beta]$ οριζουμε σαν μηκος, ακτινα και κεντρο για τα διαστηματα (α, β), $[\alpha, \beta)$ και $(\alpha, \beta]$.
- Το συνολο των πραγματικων αριθμων x, που απεχουν απ'το x_0 αποσταση μικροτερη του ρ, λεγεται **περιοχη** η **γειτονια** του x_0



- Για τον πραγματικο αριθμο x του διαστηματος $[\alpha, \beta]$ με $x\neq x_0\in\mathbb{R}$ και $\rho>0$ ισχυει

  ... $d(x,x_0)<\rho \Leftrightarrow |x-x_0|<\rho \Leftrightarrow x\in(x_0-\rho,\ x_0+\rho) \Leftrightarrow \boldsymbol{x_0-\rho<x<x_0+\rho}$

  Οι πραγματικοι αριθμοι x που ικανοποιουν τη σχεση $|x-x_0|<\rho$ ειναι τα σημεια του διαστηματος $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$ που εχει κεντρο x_0 και ακτινα ρ.

  Σ χ ο λ ι ο
  Στη περιπτωση που $x_0=0$ ειναι:
  ... $d(x,0)<\rho \Leftrightarrow |x|<\rho \Leftrightarrow x\in(-\rho,\ \rho) \Leftrightarrow \boldsymbol{-\rho<x<\rho}$
- Οι πραγματικοι αριθμοι x που ικανοποιουν τη σχεση $|x-x_0|>\rho$ αντιστοιχουν σε σημεια M(x) του αξονα x'x που απεχουν απο το σημειο $K(x_0)$ αποσταση μεγαλυτερη του ρ.
  Δηλαδη για $x_0\in\mathbb{R}$ και $\rho>0$ ισχυει

  ... $d(x,x_0)>\rho \Leftrightarrow |x-x_0|>\rho \Leftrightarrow x\in(-\infty,x_0-\rho)\cup(x_0+\rho,\ +\infty) \Leftrightarrow$
  $\boldsymbol{x<x_0-\rho}$ **η** $\boldsymbol{x>x_0+\rho}$

  Σ χ ο λ ι ο
  Στη περιπτωση που $x_0=0$ ειναι:
  ... $d(x,0)>\rho \Leftrightarrow |x|>\rho \Leftrightarrow x\notin[-\rho,\ \rho] \Leftrightarrow \boldsymbol{x<-\rho}$ **η** $\boldsymbol{x>\rho}$
- Για τους πραγματικους αριθμους x, α και β, με $\alpha\neq 0$ ισχυει

  ... $\boldsymbol{d(\alpha x,\beta)=|\alpha|\cdot d(x,\tfrac{\beta}{\alpha})}$, για καθε $\alpha,\beta,x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$

... Διαστηματα

Πρακτικα δ ι α σ τ η μ α ειναι $\frac{\beta-\alpha}{2}$ενα τμημα της ευθειας $x'x$ των πραγματικων αριθμων δηλαδη ενα συμπαγες συνολο αριθμων.
Τα διαστηματα οριζονται με την βοηθεια της απολυτης τιμης και στο παρα-κατω πινακα βλεπουμε τα ειδη αυτων.
Αν, $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ το κεντρο, $\rho = \frac{\beta-\alpha}{2}$ η ακτινα του διαστηματος $[\alpha, \beta]$ και $\gamma<0$

απολυτη τιμη	Αποσταση	συμβολισμος
$\lvert x-x_0 \rvert \leq \rho$	$d[x, x_0] \leq \rho$	$[\alpha\,,\ \beta]$
$\lvert x-x_0 \rvert < \rho$	$d[x, x_0] < \rho$	$(\alpha\,,\ \beta)$
$\lvert x \rvert \geq \rho$	$d[x, 0] \geq \rho$	$[-\infty,\ -\frac{\beta-\alpha}{2}]\cup[\ ,+\infty)$
$\lvert x \rvert > \rho$	$d[x, 0] > \rho$	$(-\infty,\ -\frac{\beta-\alpha}{2})\cup(\frac{\beta-\alpha}{2},+\infty)$
$\lvert x \rvert \leq \rho$	$d[x, 0] \leq \rho$	$[-\frac{\beta-\alpha}{2},\ \frac{\beta-\alpha}{2}]$
$\lvert x \rvert < \rho$	$d[x, 0] < \rho$	$(-\frac{\beta-\alpha}{2},\ \frac{\beta-\alpha}{2})$
$\lvert x-x_0 \rvert > \gamma$	$d[x, x_0] > \gamma$	$(-\infty, +\infty)$

Π α ρ α τ η ρ η σ η

Στη περιπτωση $\lvert x-x_0 \rvert \leq \rho$ το διαστημα ειναι:

$$[x_0-\rho,\ x_0+\rho] \xrightarrow[\rho=\frac{\beta-\alpha}{2}]{x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}} \left[\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right]$$

$$\rightarrow \left[\frac{\alpha+\beta-\beta+\alpha}{2},\ \frac{\alpha+\beta+\beta-\alpha}{2}\right] \rightarrow [\alpha, \beta]$$

Στη περιπτωση $\lvert x-x_0 \rvert < \rho$ το διαστημα ειναι:

$$(x_0-\rho,\ x_0+\rho) \xrightarrow[\rho=\frac{\beta-\alpha}{2}]{x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\alpha+\beta-\beta+\alpha}{2},\ \frac{\alpha+\beta+\beta-\alpha}{2}\right) \rightarrow (\alpha, \beta)$$

... Ριζες Πραγματικων Αριθμων

ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Τετραγωνικη ριζα** ενος μη αρνητικου αριθμου α ονομαζουμε τον μη αρνητικο αριθμο x που οταν υψωθει στο τετραγωνο μας δινει το α.

  Συμβολισμος: $\sqrt{\alpha}$

  Δηλαδη, ισχυει: $\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^2 = \alpha$ για καθε $\alpha \geq 0$, $x \geq 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

... 1. $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$, για καθε $\alpha \geq 0$

... 2. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ για καθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η $\sqrt{\alpha^2} = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

... 3. $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$, για καθε $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$

... 4. $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, για καθε $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Η τετραγωνικη ριζα $\sqrt{\alpha}$ οριζεται για καθε $\alpha \geq 0$ με $\sqrt{\alpha} \geq 0$ (με την ισοτητα να ισχυει για α=0)
- Η τριτη ιδιοτητα ισχυει και για περισσοτερους των δυο παραγοντων

  $\sqrt{\alpha_1} \cdot \sqrt{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{\alpha_\nu} = \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu}$ με $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \geq 0$
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$, για καθε $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$
- $\sqrt{\alpha^2 \beta} \Leftrightarrow |\alpha| \sqrt{\beta}$, για καθε $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$

ν–οστη ριζα

ν–οστη ριζα ενος μη αρνητικου αριθμου α ονομαζουμε τον μη αρνητικο αριθμο x που οταν υψωθει στη ν ($\nu \in \mathbb{Z}^*_+$) μας δινει το α.

Συμβολισμος: $\sqrt[\nu]{\alpha}$

Δηλαδη, ισχυει

$\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^\nu = \alpha$ για καθε $\alpha \geq 0$, $x \geq 0$, $\nu \in \mathbb{Z}^*_+$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

- $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$, για καθε $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$, για καθε $\alpha \geq 0$

... Συνεπειες ... Ριζων ...

... 1. $\sqrt[\nu]{a^\nu} = (\sqrt[\nu]{a})^\nu = a$, για καθε $a \geq 0$

... 2. $\sqrt[\nu]{a^\nu} = \begin{cases} |a|, & \text{αν } a \leq 0 \text{ και } \nu \text{ αρτιος} \\ a, & \text{αν } a \geq 0 \end{cases}$

... 3. $\sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{a \cdot \beta}$, για καθε $a \geq 0$, $\beta \geq 0$

Αποδειξη

$\sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{a \cdot \beta} \Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta})^\nu = (\sqrt[\nu]{a \cdot \beta})^\nu \Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{a})^\nu \cdot (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = a \cdot \beta \Leftrightarrow a \cdot \beta = a \cdot \beta$

που αληθευει

... 4. $\dfrac{\sqrt[\nu]{a}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{a}{\beta}}$, για καθε $a \geq 0$, $\beta > 0$

... 5. $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a}$, για καθε $a \geq 0$

Αποδειξη

$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a} \Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{a}})^{\mu\nu} = (\sqrt[\mu\nu]{a})^{\mu\nu} \Leftrightarrow ((\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{a}})^\mu)^\nu = a \Leftrightarrow (\sqrt[\mu]{a})^\mu = a \Leftrightarrow a = a$

που αληθευει

... 6. $\sqrt[\rho\cdot\nu]{a^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$, για καθε $a \geq 0$

Αποδειξη

$\sqrt[\rho\cdot\nu]{a^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{a^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(a^\mu)^\rho}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Η νιοστη ριζα $\sqrt[\nu]{a}$ οριζεται για καθε $a \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\sqrt[\nu]{a} \geq 0$ (με την ισοτητα να ισχυει για $a=0$)
- Η τριτη ιδιοτητα ισχυει και για περισσοτερους των δυο παραγοντων
  $\sqrt[\nu]{a_1} \cdot \sqrt[\nu]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{a_\nu} = \sqrt[\nu]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu}$ με $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \geq 0$

  ∞ Στη περιπτωση που ειναι $a_1 = a_2 = \ldots = a_\kappa = a \geq 0$ τοτε

  $\sqrt[\nu]{a^\kappa} = (\sqrt[\nu]{a})^\kappa$
- $\sqrt[3]{a}$, για καθε $a \geq 0$ λεγεται κυβικη ριζα του a

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

- $\sqrt[\nu]{a^\nu \beta} = a \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$, για καθε $a \geq 0$, $\beta \geq 0$
- $a < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} < \sqrt[\nu]{\beta}$, για καθε $a \geq 0$, $\beta \geq 0$

  Αποδειξη

  $\sqrt[\nu]{a} < \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{a})^\nu < (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu \Leftrightarrow a < \beta$ που αληθευει

Δυναμη με ρητο εκθετη

Αν $a > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{Z}^*_+$, τοτε οριζουμε $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$

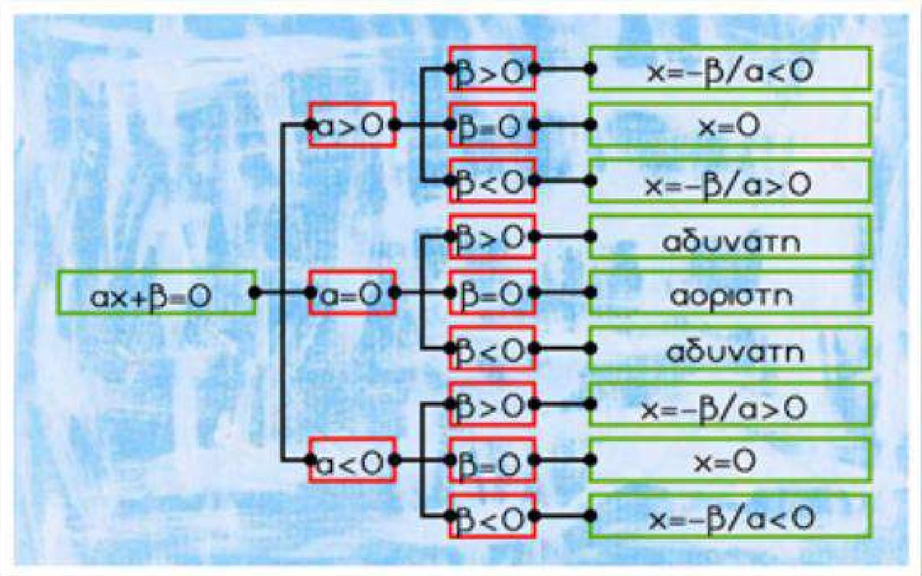
Αν $a = 0$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ και $\nu \in \mathbb{Z}^*_+$, τοτε οριζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

... Εξισωσεις 1ου Βαθμου

Ειναι η εξισωση της μορφης: $\mathbf{ax + \beta = 0}$ $a, \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ [1]

- **Λυση η ριζα** της εξισωσης λεγεται καθε τιμη του πραγματικου
  αριθμου x, που επαληθευει την [1]
- **Συντελεστης** του αγνωστου λεγεται ο αριθμος a
- **Σταθερος ορος** λεγεται ο αριθμος β

- Διερευνηση



- Παρατηρηση
  - Αν ο συντελεστης του αγνωστου η ο σταθερος ορος εκφραζεται με τη βοηθεια γραμματων, τοτε η εξισωση λεγεται παραμετρικη.
  - Ισοδυναμες λεγονται οι εξισωσεις που εχουν ακριβως τις ιδιες ριζες.
  - Αοριστη $\leftrightarrow$ ταυτοτητα
  - Χρησιμες οι ιδιοτητες απολυτων
    - Αν $\theta > 0$ τοτε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = -\theta$ η $x = \theta$
    - $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = -\theta$ η $x = \theta$

... Εξισωσεις 2ου Βαθμου

Εξισωση 2ου βαθμου μ'εναν αγνωστο, ειναι η εξισωση :
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$

- Διακρινουσα της εξισωσης δευτερου βαθμου, λεμε την αλγεβρικη παρασταση:
  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- Λυση της εξισωσης δευτερου βαθμου:
  - Αν $\Delta > 0$ τοτε η εξισωση εχει δυο ριζες ανισες στο $\mathbb{R}$ τις :
    $$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$
  - Αν $\Delta = 0$ τοτε η εξισωση εχει διπλη ριζα $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$
  - Αν $\Delta < 0$ τοτε η εξισωση δεν εχει ριζα στο $\mathbb{R}$, δηλαδη η εξισωση ειναι **αδυνατη** στο $\mathbb{R}$

  Πραγματι

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \overset{[\text{διαιρουμε με } \alpha \neq 0]}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

$$\overset{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}{\Leftrightarrow} \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \quad (1)$$

  - Αν $\Delta > 0$: $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \Rightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
  - Αν $\Delta = 0$: $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow \mathbf{x} = -\frac{\beta}{2\alpha}$
  - Αν $\Delta < 0$: Η (1) ειναι αδυνατη στο $\mathbb{R}$, οποτε η εξισωση **δεν εχει ριζες στο** $\mathbb{R}$

- Παρατηρηση
  - Η εξισωση δευτερου βαθμου εχει πραγματικες ριζες αν και μονο αν:
    $\Delta \geq 0$
  - Η εξισωση δευτερου βαθμου εχει δυο πραγματικες και ανισες ριζες αν οι α και γ ειναι ετεροσημοι.

Αθροισμα – Γινομενο Ριζων Εξισωσης 2ου βαθμου

Εστω η εξισωση: $ax^2+\beta x+\gamma=0$ με $a \neq 0$, $\Delta \geq 0$ και ριζες x_1, x_2.

- Το αθροισμα των ριζων x_1, x_2 της εξισωσης δινεται απο :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \quad (1)$$

- Το γινομενο των ριζων x_1, x_2 της εξισωσης δινεται απο :

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a} \quad (2)$$

Οι πιο πανω τυποι λεγονται τυποι του Vietta.

- Συμφωνα με τα πιο πανω η εξισωση: $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ μετασχηματιζεται:

$$ax^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow \frac{ax^2}{a}+\frac{\beta x}{a}+\frac{\gamma}{a}=0 \Leftrightarrow x^2-\left(-\frac{\beta}{a}\right)x+\frac{\gamma}{a}=0 \overset{[1]}{\underset{[2]}{\Leftrightarrow}}$$

$$x^2-Sx+P=0$$

Οι ριζες της εξισωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$ ειναι:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ και } x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Τοτε

- $$S=x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\beta+\cancel{\sqrt{\Delta}}-\beta-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-2\beta}{2a}$$

$$=-\frac{\beta}{a}$$

- $$P=x_1\cdot x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-\beta+\sqrt{\Delta})(-\beta-\sqrt{\Delta})}{4a^2}=\frac{(-\beta)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{\beta^2-\Delta}{4a^2}\overset{\Delta=\beta^2-4a\gamma}{=}\frac{\cancel{\beta^2}-\cancel{\beta^2}+4a\gamma}{4a^2}=\frac{4a\gamma}{4a^2}$$

$$=\frac{\gamma}{a}$$

… Χρησιμα

δυο ριζες πραγματικες και ανισες	$\Delta>0$ και $\alpha\neq 0$
δυο ριζες ισες	$\Delta=0$ και $\alpha\neq 0$
καμμια πραγματικη ριζα	$\Delta<0$
δυο ριζες ετεροσημες	$P<0$
δυο ριζες ετεροσημες ("θετικη" μεγαλυτερη)	$P<0$ και $S>0$
δυο ριζες ετεροσημες ("αρνητικη" μεγαλυτερη)	$P<0$ και $S<0$
δυο ριζες θετικες	$\Delta\geq 0$ και $P>0$ και $S>0$
δυο ριζες θετικες και ανισες	$\Delta>0$ και $P>0$ και $S>0$
δυο ριζες θετικες και ισες	$\Delta=0$ και $S>0$
μια ριζα θετικη και η αλλη μηδεν	$P=0$ και $S>0$
δυο ριζες αρνητικες	$\Delta\geq 0$ και $P>0$ και $S<0$
δυο ριζες αρνητικες και ανισες	$\Delta>0$ και $P>0$ και $S<0$
δυο ριζες αρνητικες και ισες	$\Delta=0$ και $S<0$
μια ριζα αρνητικη και η αλλη μηδεν	$P=0$ και $S<0$
μια ριζα το μηδεν	$P=0$
δυο ριζες ισες με μηδεν	$\Delta=0$ και $P=0$
δυο ριζες αντιστροφες	$\Delta\geq 0$ και $P=1$
δυο ριζες αντιθετες	$P<0$ και $S=0$
δυο ριζες ομοσημες	$\Delta\geq 0$ και $P>0$
δυο ριζες ομοσημες – διαφορετικες	$\Delta>0$ και $P>0$
δυο ριζες ομοσημες και ισες	$\Delta=0$ και $P>0$

ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu=a$

a	ν	λυσεις της εξισωσης $x^\nu=a$
$a = 0$	αρτιος ή περιττος	$x = 0$
$a > 0$	αρτιος	$x = \pm\sqrt[\nu]{a}$
$a > 0$	περιττος	$x = \sqrt[\nu]{a}$
$a < 0$	αρτιος	αδύνατη
$a < 0$	περιττος	$x = -\sqrt[\nu]{-a}$

ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΥ ΤΟΥ 2

ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΗ

Η εξισωση της μορφης: $\mathbf{ax^4+\beta x^2+\gamma=0}$ με $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $a \neq 0$, λεγεται διτετραγωνη και η λυση της γινεται με την αντικατασταση: $x^2 = y$, οποτε
$ax^4+\beta x^2+\gamma=0 \Leftrightarrow ay^2+\beta y+\gamma=0$

ΜΟΡΦΗΣ $\mathbf{ax^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+a=0}$

Εχει το παρατσουκλι "συμμετρικη" η "αντιστροφη" και η λυση της γινεται με διαιρεση των ορων της με x^2 και την αντικα-τασταση: $x+\frac{1}{x}=\omega$, οποτε

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\omega^2-2$$

ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ

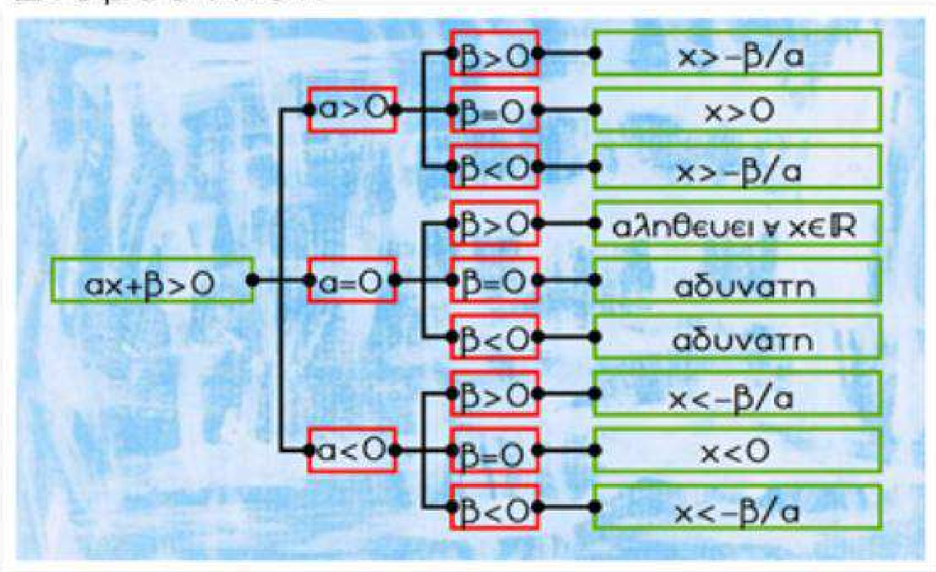
ΑΡΡΗΤΗ

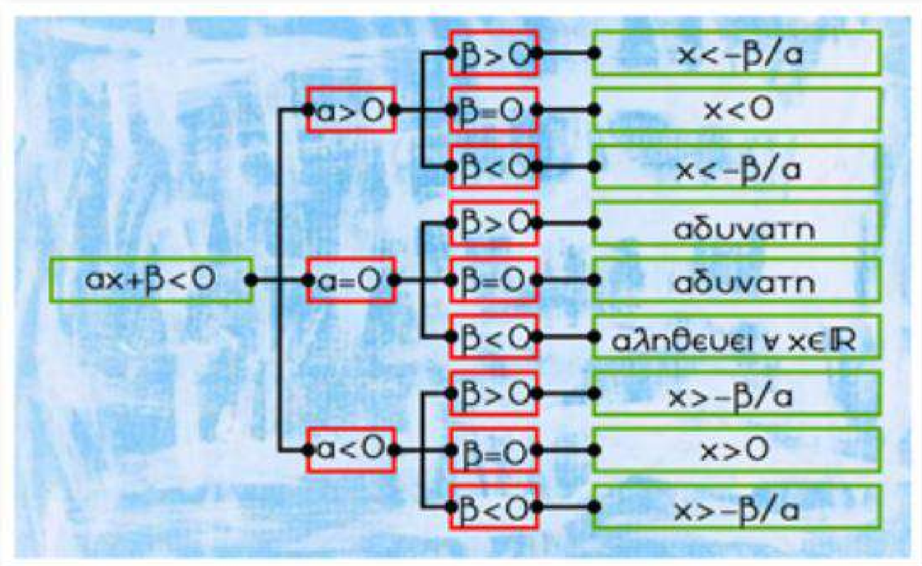
Ειναι η εξισωση που περιεχει ριζικα και η λυση της γινεται με υψωση των μελων σε καταλληλο βαθμο (ωστε να απαλειφθει το ριζικο) αφου εχουμε βρει πρωτα το συνολο που οριζεται.

... Ανισωσεις 1ου Βαθμου

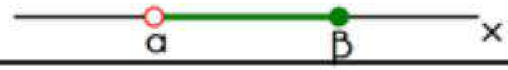
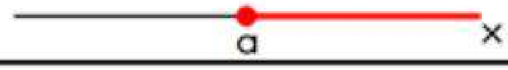
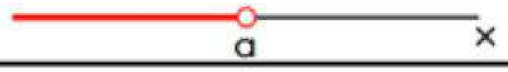
Ειναι η ανισωση της μορφης: $\alpha x + \beta > 0$ – $\alpha x + \beta < 0$ (1)

- **Λυση η ριζα** της ανισωσης λεγεται καθε τιμη του πραγματικου αριθμου x, που επαληθευει την (1)
- **Συντελεστης** του αγνωστου λεγεται ο αριθμος α
- **Σταθερος ορος** λεγεται ο αριθμος β
- Διερευνηση





- Παρατηρηση
  - Χρησιμες οι ιδιοτητες απολυτων
    - Αν $\theta>0$ τοτε: $|x|>\theta \Leftrightarrow x<-\theta$ η $x>\theta$
    - Αν $\theta>0$ τοτε: $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
  - $0 \cdot x > \kappa$, ειναι αδυνατη αν $\kappa > 0$ ενω αληθευει για καθε $x \in \mathbb{R}$ αν $\kappa < 0$
  - $0 \cdot x < \kappa$, αληθευει για καθε $x \in \mathbb{R}$ αν $\kappa > 0$ ενω ειναι αδυνατη αν $\kappa < 0$
  - $0 \cdot x > 0$, ειναι αδυνατη
  - $0 \cdot x < 0$, ειναι αδυνατη
  - Οταν διαιρουμε και τα δυο μελη μιας ανισωσης με αρνητικο αριθμο η φορα αλλαζει (ενω δεν αλλαζει, αν διαιρεσουμε με θετικο αριθμο)

ΓΡΑΦΙΚΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$x \in [\alpha, \beta]$
	$\alpha \leq x < \beta$	$x \in [\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$x \in (\alpha, \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	$x \in (\alpha, \beta)$
	$x \geq \alpha$	$x \in [\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$x \in (\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$x \in (-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$x \in (-\infty, \alpha)$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Πολυωνυμικη συναρτηση 2ου βαθμου,
λεγεται καθε συναρτηση με μορφη: $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ με $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $a \neq 0$

Τριωνυμο,
λεγεται η αλγεβρικη παρασταση: $ax^2+\beta x+\gamma$ με $a \neq 0$

Διακρινουσα και ριζες
του τριωνυμου ειναι η διακρινουσα και οι ριζες της αντιστοιχης εξισωσης δευτερου βαθμου: $ax^2+\beta x+\gamma=0$

ΜΟΡΦΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Για το τριωνυμο $ax^2+\beta x+\gamma$ με $a \neq 0$ ειναι

$$\mathbf{ax^2+\beta x+\gamma}=a\left(x^2+\frac{\beta}{a}x+\frac{\gamma}{a}\right)=a\left(\underbrace{x^2+2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2a}+\left(\frac{\beta}{2a}\right)^2}-\left(\frac{\beta}{2a}\right)^2+\frac{\gamma}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2+\frac{4a\gamma-\beta^2}{4a^2}\right]=\mathbf{a\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

Για $\Delta>0$ (x_1, x_2 οι ριζες του τριωνυμου):

$$\mathbf{ax^2+\beta x+\gamma}=a\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{4a}\right)^2\right]$$

$$=a\left(x+\frac{\beta}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{\beta}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=a\left(x+\frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{\beta-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$=a\left(x-\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\mathbf{a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$$

Για $\Delta=0$

$$\mathbf{ax^2+\beta x+\gamma}=a\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2-\cancel{\frac{\Delta}{4a^2}}^{\,0}\right]=\mathbf{a\cdot\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2}\ \text{η}$$

$$\mathbf{ax^2+\beta x+\gamma}=a\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\overset{-\Delta=|\Delta|}{=}\mathbf{a\cdot\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}\right]}$$

Δηλαδη

- Αν $\Delta>0$ τοτε το τριωνυμο $ax^2+\beta x+\gamma$ με $a \neq 0$ εχει δυο ριζες ανισες στο $\mathbb{R}$, τις x_1, x_2 και:
  $\mathbf{ax^2+\beta x+\gamma=a\cdot(x-x_1)(x-x_2)}$
- Αν $\Delta=0$ τοτε το τριωνυμο $ax^2+\beta x+\gamma$ με $a \neq 0$ εχει διπλη ριζα, την $x_0=\frac{-\beta}{2a}$ και : $ax^2+\beta x+\gamma=\mathbf{a\cdot\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2=a\cdot(x-x_0)^2}$
- Αν $\Delta<0$ τοτε το τριωνυμο $ax^2+\beta x+\gamma$ με $a \neq 0$ γινεται:

$$ax^2+\beta x+\gamma=\mathbf{a\cdot\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}\right]}.$$

. . . Προσημο Τριωνυμου

- Αν $\Delta > 0$ τοτε το τριωνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$ και ριζες $\rho_1 < \rho_2$:
  - ειναι ετεροσημο του a, αν $\rho_1 < x < \rho_2$
  - ειναι ομοσημο του a, αν $x < \rho_1$ η $x > \rho_2$
- Αν $\Delta = 0$ τοτε το τριωνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$ και $x \neq -\dfrac{\beta}{2a}$ ειναι ομοσημο του a
- Αν $\Delta < 0$ τοτε το τριωνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$ ειναι ομοσημο του a

Συνοπτικα

x		$-\infty$	ρ	ρ_1	ρ	ρ_2	ρ	$+\infty$
$ax^2 + \beta x + \gamma$	$\Delta > 0$	ομοσημο "a"		0	ετεροσημο "a"	0	ομοσημο "a"	
	$\Delta = 0$	ομοσημο "a"			0		ομοσημο "a"	
	$\Delta < 0$				ομοσημο "a"			

Παραθετουμε μια "σειρα" αριθμων:3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...
Υπαρχουν απειροι αριθμοι που διαδεχονται ο ενας τον αλλο, με καποια λογικη σειρα.
Συγκεκριμενα, καθε αριθμος προκυπτει απ' τον προηγουμενο του αν προσθεσουμε σ' αυτον το 3.
Ετσι ο ογδοος αριθμος, που δεν αναγραφεται ειναι το 24, ο ενατος το 27 κ.ο.κ.
Συγκρατησε–σημειωσε:
Μια τετοια "σειρα" αριθμων, οπως η παραπανω

- εχει καποια αρχη (πρωτος ορος)
- αποτελειται απο απειρους αριθμους (απειροι οροι)
- καθε αριθμος (ορος) της "σειρας" διαδεχεται το προηγουμενο του, με καποια λογικη σειρα

Η παραπανω "σειρα" αριθμων δεν μπορει να αποτελεσει κανονα στο συνολο των πραγματικων αριθμων (χρησιμοποιησαμε μονον ακεραιους αριθμους)
Παρομοια, ομως ισχυουν για τη νεα "σειρα" αριθμων: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$
Συνεπως το προβλημα του κανονα ξεπερνιεται
Μια τετοια "σειρα" αριθμων, που καθε ορος ακολουθει τον προηγουμενο με μια λογικη σειρα, ευλογο ειναι να ονομαστει ... **ακολουθια** .
Δηλαδη τα δυο παραπανω παραδειγματα, αποτελουν δυο διαφορετικες ακολουθιες.
Μια ακολουθια θα συμβολιζεται με καποιο γραμμα του ελληνικου η λατινικου αλφαβητου
Προκειμενου να ξεχωριζουμε τις ακολουθιες, που πιθανον εχουμε σε ενα προβλημα, χρησιμοποιουμε διαφορετικο γραμμα–συμβολο για καθεμια.
Καθε ορος της ακολουθιας οριζεται απο:

- την ακολουθια στην οποια ανηκει
- τη θεση που καταλαμβανει στην ακολουθια αυτη

Ετσι

- θεση ... : ευλογα, τη θεση του ορου στην ακολουθια αναγκαστικα τη δειχνει φυσικος αριθμος (θυμιζει ανεξαρτηση μεταβλητη ... πεδιο ορισμου)
- τιμη ορου ... : πραγματικος αριθμος που εξαρταται απ'τη θεση του και το τροπο που διαδεχεται το προηγουμενο ορο (εξαρτημενη μεταβλητη)

Δηλαδη, η ακολουθια ειναι μια συναρτηση με πεδιο ορισμου το συνολο των φυσικων αριθμων $\mathbb{N}$ και συνολο τιμων το συνολο των πραγματικων αριθμων $\mathbb{R}$.

- Καθε συναρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ ονομαζεται **ακολουθια** πραγματικων αριθμων
- Η τιμη $\alpha(\nu)$ μιας ακολουθιας α στο τυχαιο σημειο $\nu \in \mathbb{N}^*$, συμβολιζεται με α_ν και λεγεται **ορος με δεικτη ν** η **νιοστος ορος** η **γενικος ορος** της ακολουθιας
- Οι τιμες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ λεγονται **οροι** της ακολουθιας, κατα σειρα, πρωτος, δευτερος, κλπ ...
- Μια ακολουθια συμβολιζεται με (α_ν)
- Σε μια ακολουθια (α_ν), θετουμε $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu$, για καθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ και το ονομαζουμε **αθροισμα των ν-πρωτων ορων** της

- ΣΧΟΛΙΟ
  Η γραφικη παρασταση μιας ακολουθιας (συναρτηση) αποτελειται απο σημεια (οχι συνεχη γραμμη) αφου το πεδιο ορισμου της ειναι το συνολο των φυσικων αριθμων $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$, που βρισκονται στο δεξιο ημιεπιπεδο, οσον αφορα τον αξονα $y'y$

- ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ
  Υπαρχουν ακολουθιες οπου ο γενικος τους ορος ειναι δυσκολο να βρεθει με καποιο μαθηματικο τυπο η δεν υπαρχει καθολου.
  Παραδειγμα η ακολουθια των πρωτων φυσικων αριθμων
  1, 2, 3, 5, 7, ...
  Ειναι δυνατον ομως να βρεθει ενας "**αναδρομικος τυπος**", δηλαδη ενας τυπος που συνδεει καποιους γενικους ορους της ακολουθιας
  - Μια ακολουθια (α_ν), οριζεται **αναδρομικα**, αν ειναι γνωστα :
    - ο αναδρομικος της τυπος
    - οι απαραιτητοι αρχικοι οροι της, ωστε ο αναδρομικος τυπος να αρχισει να δινει ορους

- Μια ακολουθια ονομαζεται **αριθμητικη προοδος**, αν και μονο αν, υπαρχει $\omega \in \mathbb{R}$, τετοιο ωστε για καθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, να ισχυει :
  $\mathbf{a_{\nu+1} = a_\nu + \omega}$ η $\mathbf{a_{\nu+1} - a_\nu = \omega}$
  - Ο αριθμος ω ονομαζεται **διαφορα** της αριθμητικης προοδου
- Τρεις αριθμοι α, β, γ ειναι **διαδοχικοι οροι** αριθμητικης προοδου αν και μονο αν : $\mathbf{2\beta = \alpha + \gamma}$ η $\mathbf{\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$
  - Ο αριθμος β λεγεται **αριθμητικος μεσος** των α και γ

    Πραγματι

    Αν α, β, γ ειναι διαδοχικοι οροι αριθμητικης προοδου, τοτε :

    $$\left.\begin{array}{l}\beta-\alpha=\omega\\ \gamma-\beta=\omega\end{array}\right\} \Rightarrow \beta-\alpha=\gamma-\beta \Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

    Αντιστροφα:

    Αν ισχυει $2\beta=\alpha+\gamma$ τοτε $\beta-\alpha=\gamma-\beta$, που σημαινει οτι οι αριθμοι α,β,γ ειναι διαδοχικοι οροι αριθμοι αριθμητικης προοδου.
- ΝΙΟΣΤΟΣ ΟΡΟΣ

  Σε μια αριθμητικη προοδο (a_ν) με διαφορα ω, ισχυει :

  ... $\mathbf{a_\nu = a_1 + (\nu-1)\cdot\omega}$

  Πραγματι

  $$\left.\begin{array}{l}a_1=a_1\\ a_2=a_1+\omega\\ a_3=a_2+\omega\\ \dots\dots\dots\\ a_{\nu-1}=a_{\nu-2}+\omega\\ a_\nu=a_{\nu-1}+\omega\end{array}\right| \begin{array}{l}\underline{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{\nu-1}}+a_\nu=\\ \overset{(+)}{\Rightarrow} a_1+\underline{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{\nu-1}}+\underbrace{\omega+\omega+\ldots+\omega}_{\pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \nu-1}\\ \Rightarrow a_\nu=a_1+(\nu-1)\omega\end{array}$$
- ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ

  Σε μια αριθμητικη προοδο (a_ν) με διαφορα ω, ισχυει :

  ... $\mathbf{S_\nu = \dfrac{a_1+a_\nu}{2}\cdot\nu = \dfrac{2a_1+(\nu-1)\cdot\omega}{2}\cdot\nu}$

  Πραγματι

  $$\left.\begin{array}{l}S_\nu=a_1+a_2+\ldots+a_{\nu-1}+a_\nu\\ \quad=a_1+(a_1+\omega)+(a_1+2\omega)+\ldots+[a_1+(\nu-2)\omega]+[a_1+(\nu-1)\omega]\\ S_\nu=a_\nu+a_{\nu-1}+\ldots+a_2+a_1\\ \quad=a_\nu+(a_\nu-\omega)+(a_\nu-2\omega)+\ldots+[a_\nu-(\nu-2)\omega]+[a_\nu-(\nu-1)\omega]\end{array}\right| \overset{(+)}{\longrightarrow}$$

  $$2S_\nu=\underbrace{(a_1+a_\nu)+(a_1+a_\nu)+\ldots+(a_\nu+a_1)+(a_\nu+a_1)}_{\pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \nu}\Rightarrow 2S_\nu=\nu\cdot(a_1+a_\nu)\Rightarrow$$

  $$\mathbf{S_\nu=\frac{\nu}{2}\cdot(a_1+a_\nu)} \overset{a_\nu=a_1+(\nu-1)\omega}{\Rightarrow} S_\nu=\frac{\nu}{2}\cdot(a_1+a_1+(\nu-1)\cdot\omega)\Rightarrow$$

  $$\mathbf{S_\nu=\frac{\nu}{2}\cdot(2a_1+(\nu-1)\cdot\omega)}$$

. . . Γεωμετρικη Προοδος

- Μια ακολουθια ονομαζεται **γεωμετρικη προοδος**, αν και μονο αν, υπαρχει $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ωστε για καθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, να ισχυει :

$$\alpha_{\nu+1} = \lambda \cdot \alpha_\nu \quad \text{η} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

  - Ο αριθμος λ ονομαζεται **λογος** της γεωμετρικης προοδου

- Τρεις αριθμοι α, β, γ ειναι **διαδοχικοι οροι** γεωμετρικης προοδου αν και μονο αν : $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ η $\beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma}$

  - Ο αριθμος β λεγεται **γεωμετρικος μεσος** των α και γ

    Πραγματι

    Αν α,β,γ ειναι διαδοχικοι οροι γεωμετρικης προοδου, τοτε :

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda \\ \dfrac{\gamma}{\beta} = \lambda \end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

    Αντιστροφα:

    Αν ισχυει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ τοτε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$, που σημαινει οτι οι αριθμοι α,β,γ ειναι διαδοχικοι οροι γεωμετρικης προοδου.

- ΝΙΟΣΤΟΣ ΟΡΟΣ

Σε μια γεωμετρικη προοδο (α_ν) με λογο λ, ισχυει:

... $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$

Πραγματι

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda \\ \alpha_3 = \alpha_2 \cdot \lambda \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} \cdot \lambda \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda \end{matrix}\right| \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{matrix} \cancel{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_{\nu-1})} \cdot \alpha_\nu = \\ \alpha_1 \cdot \cancel{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_{\nu-1})} \cdot \underbrace{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \dots \cdot \lambda}_{\text{πληθος } \nu-1} \Rightarrow \\ \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \end{matrix}$$

- ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ

Σε μια γεωμετρικη προοδο (α_ν) με λογο λ, ισχυει:

... $S_\nu = \dfrac{\alpha_1 \cdot (\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$ αν $\lambda \neq 1$ η $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$ αν $\lambda = 1$

Πραγματι

$$\left.\begin{matrix} S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \dots + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-2} + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} & (1) \\ \lambda \cdot S_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \alpha_1 \cdot \lambda^3 + \dots + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} + \alpha_1 \cdot \lambda^\nu & (2) \end{matrix}\right| \xrightarrow{(2)-(1)}$$

$\lambda \cdot S_\nu - S_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^\nu - \alpha_1 \Rightarrow$

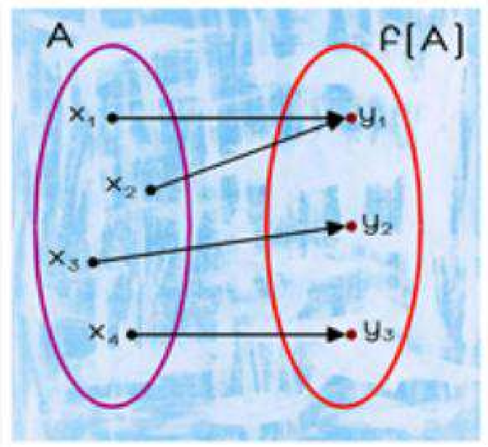
$(\lambda - 1) \cdot S_\nu = \alpha_1 \cdot (\lambda^\nu - 1) \rightarrow$

$S_\nu = \dfrac{\alpha_1 \cdot (\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$

... Συναρτηση

Εστω A ενα μη κενο υποσυνολο του ℝ.
Ονομαζουμε **πραγματικη συναρτηση** με πεδιο ορισμου το A μια διαδικασια (κανονα) f, με την οποια **καθε** στοιχειο x∈A αντιστοιχιζεται **σ'ενα μονο** πραγματικο αριθμο y.
Το y ονομαζεται **τιμη** της f στο x και συμβολιζεται f(x)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ



- Για να εκφρασουμε τη διαδικασια (κανονα) f, γραφουμε:
  $f: A \to \mathbb{R}$
  $x \to f(x)$
- Το γραμμα x λεγεται ανεξαρτητη μεταβλητη, ενω το γραμμα y, που παριστανει την τιμη της f στο x λεγεται εξαρτημενη μεταβλητη
- Το συνολο A λεγεται πεδιο ορισμου της f συμβολιζεται με D_f η A_f (συνηθως)
  - Θα μελετησουμε μονο συναρτησεις που εχουν πεδιο ορισμου διαστημα η ενωση διαστηματων
  - Προσδιοριζουμε το πεδιο ορισμου απο τον αρχικο τυπο της συναρτησης (οχι αυτον που προκυπτει απο απλοποιησεις κλπ)
  - Αν το πεδιο ορισμου A της συναρτησης f δεν δινεται, τοτε το βρισκουμε απ'τους περιορισμους
- Καθε στοιχειο x του πεδιου ορισμου A ονομαζεται αρχετυπο (ορισμα) της f, ενω ο y ονομαζεται εικονα της f στο x.
- Το συνολο που εχει για στοιχεια του τις τιμες της f σε ολα τα x∈A, λεγεται **συνολο τιμων** της f και συμβολιζεται με **f(A)**, δηλαδη: $f(A)=\{y|y=f(x)$ για καποιο $x\in A\}$
- Μια συναρτηση ειναι ορισμενη, οταν γι'αυτην γνωριζουμε:
  - Το πεδιο ορισμου της A
  - Τη τιμη της f(x) για καθε x∈ℝ, δηλαδη τον τυπο μεσω του οποιου μπορουμε να βρουμε τη τιμη f(x) για καθε x∈ℝ
- Προσοχη στις εκφρασεις του ορισμου
  "καθε ... x∈A",
  "σ'ενα μονο ... y"
  αν δεν ισχυουν και οι δυο, τοτε δεν οριζεται η συναρτηση
- Στις συναρτησεις πολλαπλου τυπου, το πεδιο ορισμου ειναι το συνολο που προκυπτει απο την ενωση των επιμερους συνολων στα οποια οριζονται οι κλαδοι της συναρτησης.

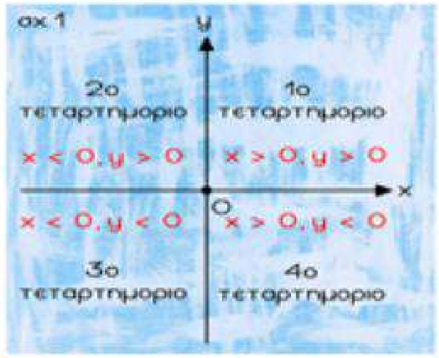
... Γραφικη Παρασταση

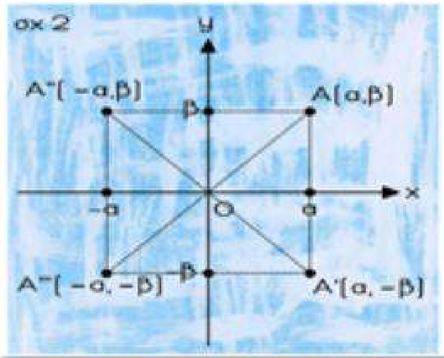
- **Καρτεσιανο** συστημα αναφορας ειναι το συστημα των δυο καθετα τεμνομενων αξονων x'x και y'y με κοινη αρχη το O
- **Ορθοκανονικο** ειναι το καρτεσιανο συστημα αναφορας, που οι μοναδες των αξονων εχουν το ιδιο μηκος

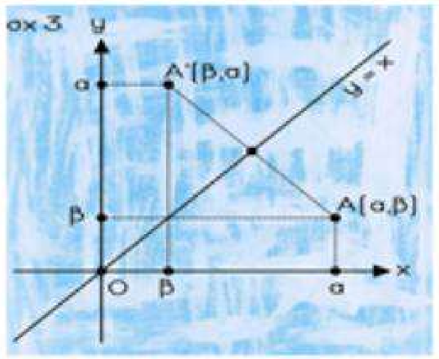
Εστω το σημειο Α(α,β) του καρτεσιανου επιπεδου .

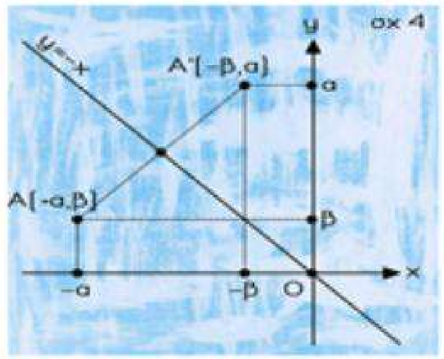
- Οι αριθμοι α, β λεγονται **συντεταγμενες** του σημειου Α .
- Ο αριθμος α λεγεται **τετμημενη** του σημειου Α .
- Ο αριθμος β λεγεται **τεταγμενη** του σημειου Α

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ









- Τα σημεια του αξονα x'x και μονο αυτα εχουν τεταγμενη ιση με το μηδεν, δηλαδη ειναι της μορφης Μ(α, 0)
- Τα σημεια του αξονα y'y και μονο αυτα εχουν τετμημενη ιση με το μηδεν, δηλαδη ειναι της μορφης Ν(0, β)
- Οι αξονες χωριζουν το καρτεσιανο επιπεδο σε τεσσερα τεταρτημορια, 1ο, 2ο, 3ο και 4ο τεταρτημοριο, και τα προσημα των συντεταγμενων των σημειων τους φαινονται στο σχημα 1

Για το σημειο Α(α, β) του καρτεσιανου επιπεδου

- το συμμετρικο του ως προς τον αξονα x'x ειναι το σημειο Α'(α,−β), που εχει ιδια τετμημενη και αντιθετη τεταγμενη (Σχ2)
- το συμμετρικο του ως προς τον αξονα y'y ειναι το σημειο Α''(−α, β), που εχει ιδια τεταγμενη και αντιθετη τετμημενη (Σχ2)
- το συμμετρικο του ως προς την αρχη των αξονων ειναι το σημειο Α'''(−α, −β), που εχει αντιθετες συντεταγμενες (Σχ2)
- το συμμετρικο του ως προς τη διχοτομο της 1ης και 3ης γωνιας των αξονων (ευθεια y=x) ειναι το σημειο Α'(β,α) που εχει τετμημενη την τεταγμενη του Α και τεταγμενη την τετμημενη του Α (Σχ3)
- το συμμετρικο του ως προς τη διχοτομο της 2ης και 4ης γωνιας των αξονων (ευθεια y=−x) ειναι το σημειο Α' που εχει τετμημενη την αντιθετη της τεταγμενης του Α και τεταγμενη την αντιθετη της τετμημενης του Α (Σχ4)

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

Η αποσταση δυο σημειων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δινεται απ'τον τυπο:

... $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Γραφικη παρασταση της f με πεδιο ορισμου το A, που συμβολιζεται με C_f, ειναι το συνολο ολων των σημειων του επιπεδου που αντιστοιχουν στα ζευγη $(x,f(x))$, $x\in A$

- Εξισωση γραφικης παραστασης της f: $y=f(x)$, οπου $f(x)$ ειναι ο τυπος της συναρτησης f
- Χαρακτηριστικη ιδιοτητα της $y=f(x)$:
  Ενα σημειο $M(x,y)$ ανηκει στην C_f αν οι συντεταγμενες του επαληθευουν την εξισωση $y=f(x)$ και αντιστροφως

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Οποιαδηποτε καθετη ευθεια στον αξονα $x'x$ τεμνει τη γραφικη παρασταση μιας συναρτησης το πολυ σε ενα σημειο.
  Δηλαδη, δεν υπαρχουν διαφορετικα σημεια της γραφικης παραστασης της f, με την ιδια τετμημενη
- Η τιμη της $f:A\to\mathbb{R}$ στο $x_0\in A$, ειναι η τεταγμενη y_0 του σημειου τομης M της ευθειας $x=x_0$ και της γραφικης παραστασης C_f
- Το πεδιο ορισμου της f ειναι το συνολο A των τετμημενων των σημειων της γραφικης παραστασης C_f
  Δηλαδη, η προβολη της γραφικης παραστασης στον αξονα $x'x$
- Το συνολο τιμων της f ειναι το συνολο $f(A)$ των τεταγμενων των σημειων της γραφικης παραστασης C_f
  Δηλαδη, η προβολη της γραφικης παραστασης στον αξονα $y'y$

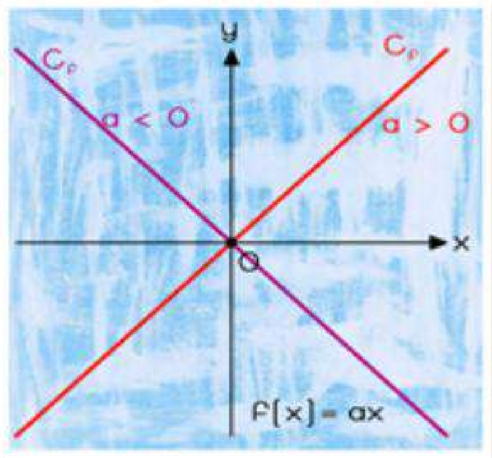
ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

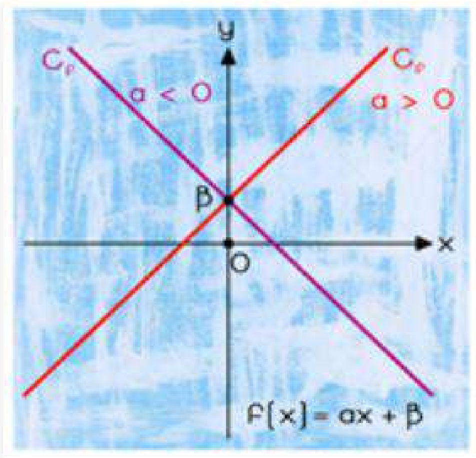
- Η γραφικη παραστασης της συναρτησης $-f$ ειναι συμμετρικη, ως προς τον αξονα $x'x$, της γραφικης παραστασης της f, γιατι αποτελειται απ'τα σημεια $M'(x,-f(x))$ που ειναι συμμετρικα των $M(x,f(x))$, ως προς τον αξονα $x'x$
- Η γραφικη παρασταση της $|f|$ αποτελειται απο τα τμηματα της της γραφικης παραστασης της f, που βρισκονται πανω απο τον αξονα $x'x$, πανω στον αξονα $x'x$ και απ' τα συμμετρικα, ως προς τον αξονα $x'x$, των τμηματων της γραφικης παραστασης της f, που βρισκονται κατω απ' τον αξονα αυτον

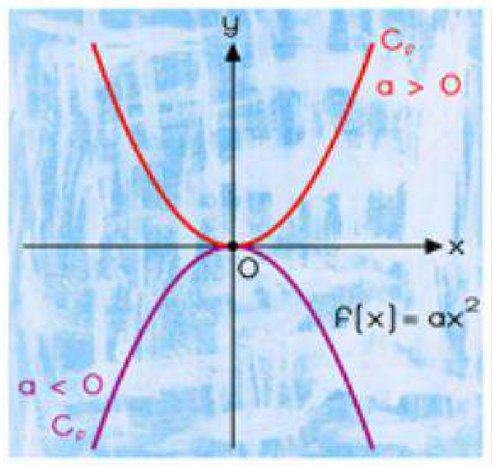
ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

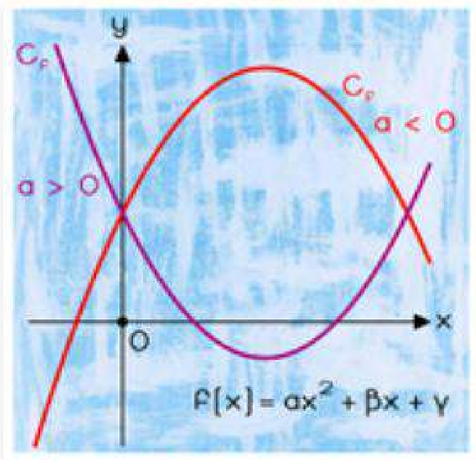
- Η γραφικη παρασταση της συναρτησης $f(x)=g(x)+c$, με $c>0$ (αντιστοιχα $c<0$), προκυπτει απ'τη κατακορυφη μετατοπιση της γραφικης παραστασης της συναρτησης g κατα c μοναδες προς τα πανω (αντιστοιχα κατω)
- Η γραφικη παρασταση της συναρτησης $f(x)=g(x+c)$, με $c>0$ (αντιστοιχα $c<0$), προκυπτει απ'την οριζοντια μετατοπιση της γραφικης παραστασης της συναρτησης g κατα c μοναδες προς τα αριστερα (αντιστοιχα δεξια)

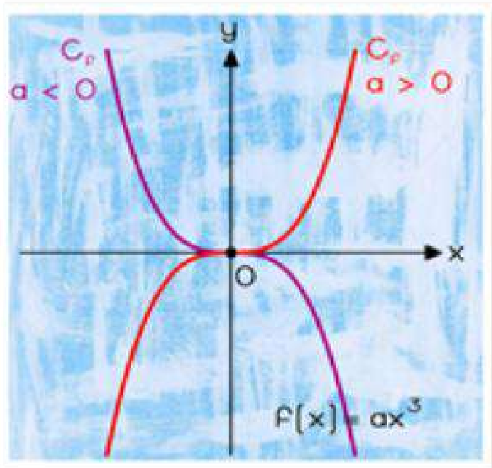
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

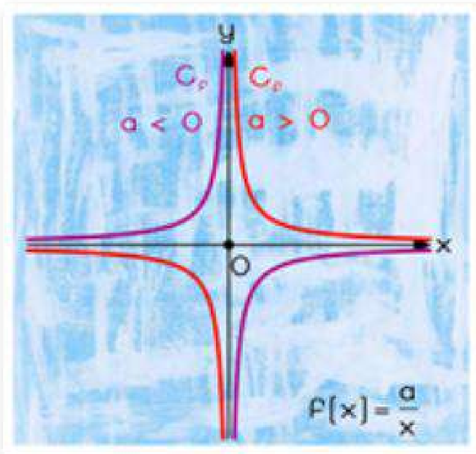


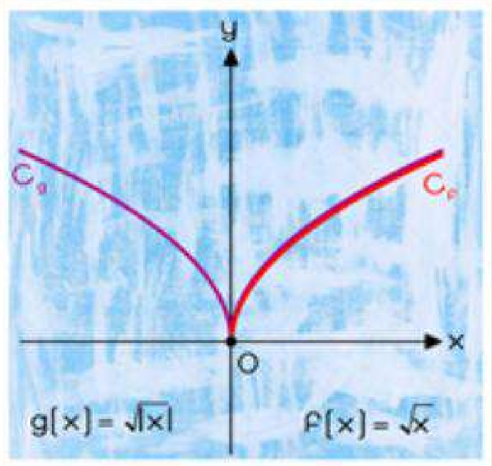


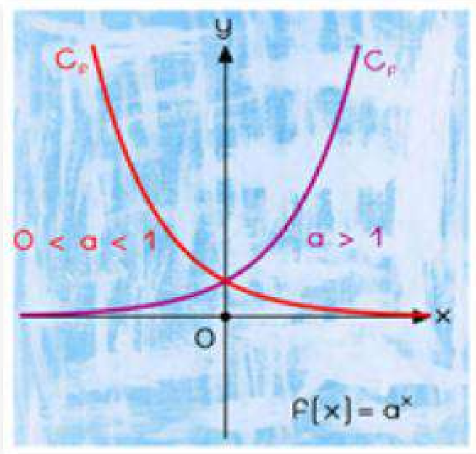










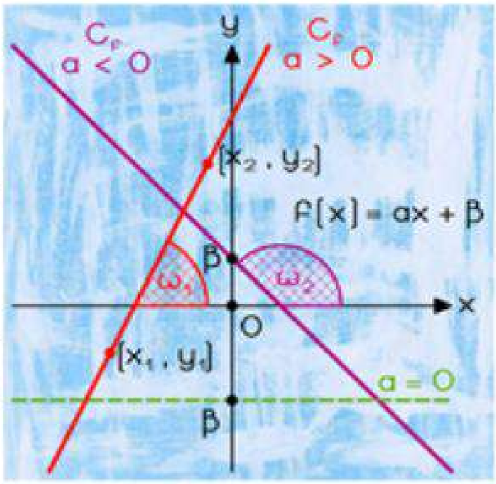


... Η Συναρτηση $f(x)=ax+\beta$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συντελεστης διευθυνσης (κλιση) της ευθειας $y = ax + \beta$ λεγεται ο αριθμος $\lambda = a = \varepsilon\varphi\omega$, οπου ω ειναι η γωνια που σχηματιζει η ευθεια με τον αξονα x'x

ΣΧΟΛΙΑ



- Χαρακτηριστικα της της ευθειας $y = ax + \beta$ τα α, β που την καθιστουν μοναδικη.
  - β: Προσδιοριζει το σημειο του αξονα y'y απ'οπου διερχεται η ευθεια.
  - α: η **κλιση της ευθειας** και προσδιοριζει την διευθυνση της ευθειας στο καρτεσιανο επιπεδο
- Αν $a > 0$ τοτε : $0^\circ < \hat{\omega}_1 < 90^\circ$
- Αν $a < 0$ τοτε : $90^\circ < \hat{\omega}_2 < 180^\circ$
- Αν $a = 0$ τοτε : $\hat{\omega} = 0^\circ \rightarrow$ η ευθεια ειναι παραλληλη στον αξονα x'x. Στη περιπτωση αυτη, η συναρτηση παιρνει τη μορφη $f(x) = \beta$ και λεγεται **σταθερη συναρτηση**, γιατι η τιμη της ειναι η ιδια για καθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν $\hat{\omega} = 90^\circ$ (η ευθεια ειναι παραλληλη στον αξονα y'y) δεν οριζεται ο συντελεστης διευθυνσης α.

Γραφημα της $f(x) = ax + \beta$

- Σαν ευθεια, αρκουν δυο σημεια της για να οριζεται
- τεμνει τον αξονα y'y στο σημειο $(0, \beta)$
- τεμνει τον αξονα x'x στο σημειο $(-\frac{\beta}{a}, 0)$

Εστω Oxy ενα συστημα συντεταγμενων στο επιπεδο και $A(x_1,y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δυο σημεια του επιπεδου και ε η ευθεια που διερχεται απ' τα σημεια Α, Β.

- Αν $x_1 \neq x_2$

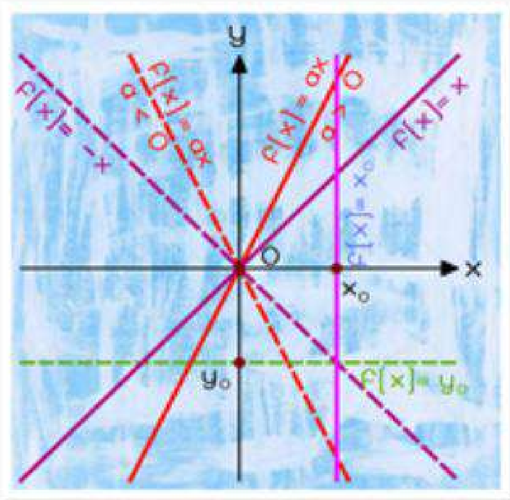
$$\left.\begin{array}{l} A \in \varepsilon \rightarrow y_1 = ax_1 + \beta \\ B \in \varepsilon \rightarrow y_2 = ax_2 + \beta \end{array}\right\} \rightarrow y_2 - y_1 = \lambda x_2 + \beta - \lambda x_1 - \beta \Rightarrow y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Αν $x_1 = x_2$

(ευθεια κατακορυφη) δεν οριζεται ο συντελεστης διευθυνσης της ευθειας. Τοτε η εξισωση της κατακορυφης ευθειας που διερχεται απ'το σημειο $A(x_1, y_1)$ ειναι η $x = x_1$, αφου καθε σημειο της εχει τετμημενη x_1

... Ειδικη μορφη της $f(x)=\alpha x+\beta$



- **$f(x) = \alpha \cdot x$** $\;(\beta = 0)$
  Η ευθεια αυτη διερχεται απ'την αρχη των αξονων Ο(0, 0) και αν
  - $\alpha > 0$, τοτε βρισκεται στο 1ο – 3ο τεταρτημοριο
  - $\alpha < 0$, τοτε βρισκεται στο 2ο – 4ο τεταρτημοριο

- **$f(x) = x$** $\;(\alpha = 1,\ \beta = 0)$
  Η ευθεια αυτη διερχεται απ'την αρχη των αξονων Ο(0,0) και ειναι η διχοτομος των γωνιων που σχηματιζουν
  - οι θετικοι ημιαξονες Οx – Oy και
  - οι αρνητικοι Οx'– Oy'

- **$f(x) = -x$** $\;(\alpha = -1,\ \beta = 0)$
  Η ευθεια αυτη διερχεται απ'την αρχη των αξονων Ο(0, 0) και ειναι η διχοτομος των γωνιων που σχηματιζουν
  - ο θετικος ημιαξονας Oy και ο αρνητικος Οx'
  - ο θετικος ημιαξονας Οx και ο αρνητικος Oy'

- **$f(x) = yo$** $\;(\alpha = 0,\ \beta = yo)$
  Η ευθεια αυτη ειναι παραλληλη στον αξονα x'x και διερχεται απο το σημειο Α(0, yo) του y'y (οριζοντια).

- **$x = xo$** $\;(\alpha$ δεν οριζεται$)$
  Η ευθεια αυτη ειναι παραλληλη στον αξονα y'y και διερχεται απο το σημειο Β(xo, 0) του x'x (κατακορυφη)
  Προσοχη: Δεν αποτελει γραφημα συναρτησης

Εστω οι ευθειες ϵ_1:$a_1x+\beta_1$, ϵ_2:$a_2x+\beta_2$, ϵ_3:$a_3x+\beta_3$, που σχηματιζουν με τον αξονα x'x γωνιες ω_1, ω_2 και ω_3 αντιστοιχα

Αν

- $a_1 = a_2 \rightarrow \text{εφ}\omega_1 = \text{εφ}\omega_2 \rightarrow \omega_1 = \omega_2 \rightarrow \begin{cases} \text{αν } \beta_1 = \beta_2 \rightarrow \epsilon_1, \epsilon_2 \text{ ταυτιζονται} \\ \text{αν } \beta_1 \neq \beta_2 \rightarrow \epsilon_1, \epsilon_2 \text{ παραλληλες} \end{cases}$
- $a_1 \neq a_3 \rightarrow \text{εφ}\omega_1 \neq \text{εφ}\omega_3 \rightarrow \omega_1 \neq \omega_3 \rightarrow \epsilon_1, \epsilon_3$ τεμνονται
- Οι ευθειες της μορφης $y = ax + \beta$, με β σταθερο και a μεταβλητο διερχονται ολες (συντρεχουν) απο το σημειο $(0, \beta)$ του αξονα y'y