

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Αν $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ τότε για κάθε α, β πραγματικό με $\alpha = \beta$ θα ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.

Ψευδής

Αν $f(x) = \ln x$ το $-2 = -2$ όμως δεν ορίζεται το $f(-2)$.

2) Αν η f περιττή και το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της τότε το $f(0)$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

Ψευδής

Η f περιττή συνεπώς $f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ άρα δεν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

3) Οι περιοδικές συναρτήσεις δεν παρουσιάζουν ολικά ακρότατα.

Ψευδής

Η $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο το 1 και ελάχιστο το -1 .

4) Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε x πραγματικό τότε η $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ για κάθε x πραγματικό.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ τότε $f(x)g(x) = 0$ για κάθε x πραγματικό και δεν είναι καμία από τις δυο μηδενική συνάρτηση.

5) Αν f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το \mathfrak{R} και ισχύει ότι $|f(x)| = |g(x)|$ τότε $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε x πραγματικό.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(x), & x < 0 \end{cases}$ τότε ισχύει ότι $|f(x)| = |g(x)|$ και δεν ισχύει ότι: $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε x πραγματικό.

6) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x, & x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$ είναι και άρτια και περιττή.

Ψευδής

Αν ήταν άρτια θα έπρεπε $-2 = f(-2) = f(2) = 2$ άτοπο ενώ αν ήταν περιττή θα έπρεπε να ισχύει ότι:

$$\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \text{ άτοπο.}$$

7) Μια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι και περιττή και άρτια.

Ψευδής

Η $f(x)=0$ για κάθε x πραγματικό είναι και άρτια και περιττή αφού για κάθε x πραγματικό το x πραγματικός και $f(-x) = f(x) = -f(x) = 0$.

8) Αν η f δεν έχει ρίζες στο πεδίο ορισμού της τότε διατηρεί πρόσημο.

Ψευδής

A. Η $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν έχει ρίζες και είναι $f(x) < 0$ για $x < 0$ και $f(x) > 0$ για $x > 0$.

B. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$ δεν έχει ρίζες και δεν διατηρεί πρόσημο.

9) Αν μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} τότε δεν έχει ακρότατα.

Ψευδής

Η $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μέγιστο το 1 και ελάχιστο το -1.

10) Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $[-1, 1]$ τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A$ (A το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f) για το οποίο ισχύει $f(x_0) = -1$.

Ψευδής

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει ελάχιστο το -1 και όμως το -1 παρουσιάζεται σε κάθε

$$x_0 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

11) Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) - f(x+2) = 0$ τότε η f είναι περιοδική.

Αληθές

Για $x \in \mathbb{R}$, το $x+2, x-2 \in \mathbb{R}$ έχω $f(x+2) = f(x)$ για x το $x-2$ έχω $f(x-2) = f(x)$ και άρα η f είναι περιοδική με περίοδο $T=2$ αφού για $x \in \mathbb{R}$ το $x+2$ και το $x-2$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της και ισχύει $f(x) = f(x+2) = f(x-2)$.

12) Αν μία συνάρτηση είναι άρτια θα έχει υποχρεωτικά ή ελάχιστο ή μέγιστο.

Ψευδής

Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι άρτια με σύνολο τιμών το \mathbb{R} άρα δεν έχει ακρότατα.

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

13) Αν δυο συναρτήσεις είναι ίσες τότε έχουν τον ίδιο τύπο.

Ψευδής

Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$ με πεδίο ορισμού $Df = Dg = \{-1, 0, 1\}$ τότε αυτές έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και για κάθε $x \in Df = Dg = \{-1, 0, 1\}$ ισχύει $f(x) = g(x)$ άρα $f=g$ και όμως δεν έχουν τον ίδιο τύπο.

14) Αν δυο συναρτήσεις έχουν τον ίδιο τύπο είναι ίσες.

Ψευδής

Αν $f(x) = x$ με πεδίο ορισμού το \mathcal{R} και $g(x) = x$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ που δεν είναι ίσες γιατί δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

ΣΥΝΘΕΣΗ

15) Αν η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το \mathcal{R} τότε υποχρεωτικά οι f, g έχουν πεδίο ορισμού το \mathcal{R} .

Ψευδής

Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, με $Df = [-1, 1]$ και $g(x) = \eta\mu x$, $Dg = \mathcal{R}$ τότε $D_{f \circ g} = \{x \in Dg : g(x) \in Df\} = \mathcal{R}$ και $(f \circ g)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$ με $x \in \mathcal{R}$.

16) Ισχύει $f \circ g = g \circ f$

Ψευδής

Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$ τότε $(f \circ g)(x) = x$ με $x \geq 0$ και $(g \circ f)(x) = |x|$ με x πραγματικό που προφανώς δεν είναι ίσες.

17) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f, g, h : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ισχύει $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

Ψευδής

Αν $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $h(x) = -x$ με x πραγματικό τότε $f \circ (g + h)(x) = f(0) = 0$ και $(f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = 2x^2, x \in \mathcal{R}$.

18) Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $g(x)$ ώστε $(f \circ g)(x) = |\eta\mu x|, x \in \mathcal{R}$.

Ψευδής

Είναι $(f \circ g)(x) = |\eta\mu x|$ και $(f \circ g)(x) = \sqrt{1-g^2(x)}$ τότε $\sqrt{1-g^2(x)} = |\eta\mu x| \Leftrightarrow g^2(x) = 1 - \eta\mu^2 x$
 $\Leftrightarrow |g(x)| = |\sigma\upsilon\nu x|$. Άπειρες συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x, & x \in A \\ -\sigma\upsilon\nu x, & x \in B \end{cases}$ όπου A, B υποσύνολα του \mathcal{R} χωρίς κοινά στοιχεία.

MONOTONIA

19) Αν η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathcal{R} τότε υποχρεωτικά η f είναι γνησίως αύξουσα.

Ψευδής

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathcal{R} τότε για κάθε x_1, x_2 με $x_1 < x_2 \xrightarrow{f} f(x_1) > f(x_2)$
 $\xrightarrow{f} f(f(x_1)) < f(f(x_2))$ δηλαδή η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα και η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

20) Αν μια μη σταθερή συνάρτηση δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Ψευδής

Η $f(x) = \eta\mu x$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της όμως δεν είναι ούτε γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

21) Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της τότε δεν έχει ακρότατα.

Ψευδής

Η $f(x) = \eta\mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχει μέγιστο το 1 και ελάχιστο το 0.

22) Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα κατά διαστήματα τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Ψευδής

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ όμως $-1 < 1$ και $f(-1) < f(1)$ οπότε δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

23) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$ και στο $[\beta, \gamma]$ τότε αυτή είναι και γνησίως αύξουσα στο $[a, \gamma]$

Αληθές

Για κάθε $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Για κάθε $x_1, x_2 \in [\beta, \gamma]$ με

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Για $x_1 \in [a, \beta], x_2 \in [\beta, \gamma]$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $x_1 \leq \beta \leq x_2$ (Οι δυο ισότητες δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα) θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \gamma]$.

24) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$ και στο $(\beta, \gamma]$ τότε αυτή είναι και γνησίως αύξουσα στο $[a, \gamma]$.

Ψευδής

Η $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1, 2] \\ x-1, & x \in (2, 3] \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ και στο $(2, 3]$ όμως δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$ αφού $2 < 3$ και $f(2) = f(3)$.

25) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα.

Ψευδής

Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ρίζα αφού $e^x > 0$ για κάθε x πραγματικό.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

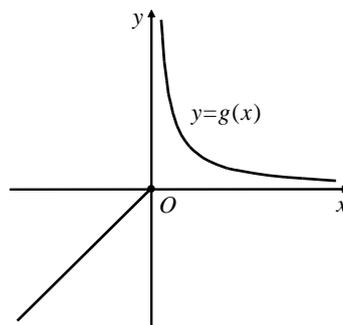
26) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη.

Ψευδής

A) Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι

γνησίως μονότονη,

B) Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της ενώ είναι κατά διαστήματα.



27) Η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + x - 2)(x^{2018} + 333x^{1789} - 6x^{1821} - \sqrt{x}) + 1$ είναι 1-1.

Ψευδής

Είναι $f(1) = f(0) = 1$ άρα δεν είναι 1-1.

28) Αν η f αντιστρέψιμη τότε $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$.

Ψευδής

Αφού το πεδίο ορισμού της $f^{-1} \circ f$ είναι το πεδίο ορισμού της f και το πεδίο ορισμού της $f \circ f^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών της f .

29) Υπάρχει συνάρτηση άρτια με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} που είναι γνησίως μονότονη.

Ψευδής

Αφού είναι άρτια για $x \neq 0$ το $-x \neq x$ και $f(-x) = f(x)$ άρα δεν είναι 1-1 άρα δεν είναι γνησίως μονότονη.

30) Αν δυο αντίστροφες συναρτήσεις έχουν κοινά σημεία τότε αυτά είναι πάνω στην ευθεία $y = x$.

Ψευδής

Η $f(x) = -x$ (διχοτόμος 2^{ου}, 4^{ου} τεταρτημορίου) η αντίστροφη της είναι η $f^{-1}(x) = -x$ που κάθε σημείο $(\alpha, -\alpha)$ με $\alpha \neq 0$ είναι κοινό σημείο και δεν ανήκει στην $y = x$.

31) Υπάρχουν συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την g να μην είναι 1-1 και η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι 1-1.

Ψευδής

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η g είναι 1-1.

32) Αν η f είναι περιττή και αντιστρέψιμη η αντίστροφη είναι περιττή.

Αληθής

Έστω A το πεδίο ορισμού της f , τότε αν ψ ανήκει στο πεδίο ορισμού της αντίστροφης (σύνολο τιμών της f) θα υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$, όμως το $-x$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και άρα το $f(-x) = -f(x) = -y$ άρα το $-y$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της αντίστροφης και $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$ δηλαδή η f^{-1} είναι περιττή.

33) Η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

Ψευδής

A. Για $\psi = f(x)$ έχουμε $\psi = x$ άρα η αντίστροφη της είναι η $\psi = x$ με $x \in \mathbb{R}$.

B. Το σημείο $(2,2)$ είναι σημείο της C_f όμως το $(2,2)$ θα ανήκει και στην f^{-1} που όμως δεν επαληθεύει την $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

34) Υπάρχει συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} που δεν είναι 1-1 και η $f \circ f$ είναι 1-1.

Ψευδής

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1.

35) Αν η f είναι συνεχής τότε και η f^{-1} είναι συνεχής.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ η f είναι συνεχής για $x < 1$ ως πολυωνυμική και για $x \geq 1$ ως πολυωνυμική άρα

είναι συνεχής. Η $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$ όμως είναι ασυνεχής στο 1.

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \right)$$

36) Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ψευδής

$$\text{Η } f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1.$$

37) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $g(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = -\infty$.

Ψευδής

$$\text{Αν } f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ και } g(x) = -x^2 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ και } g(x) < 0 \text{ κοντά στο } 0 \text{ και όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)] = -1$$

38) Το όριο αθροίσματος δυο συναρτήσεων είναι ίσο με το άθροισμα των ορίων δυο συναρτήσεων.

Ψευδής

$$\text{Αν } f(x) = x - \frac{1}{x} \text{ και } g(x) = \frac{1}{x} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ ενώ το } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)], \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] \text{ δεν}$$

$$\text{υπάρχουν αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x)] = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} [g(x)] = -\infty$$

39) Αν $f(x) < g(x) < h(x)$ τότε δεν μπορεί να ισχύει το κριτήριο παρεμβολής.

Ψευδής

Αφού αν $f(x) < g(x) < h(x)$ τότε ισχύει και ότι $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

$$40) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ ή } -\infty.$$

Ψευδής

Η $f(x) = 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ όμως το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$ δεν είναι καλά ορισμένο.

41) Αν το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης f είναι το $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ εξαρτάται από τα a και β .

Ψευδής

Αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0 = 0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$$

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

42) Αν $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ψευδής

Η $f(x) = -\frac{1}{x}, x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

43) Ισχύει πάντα $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ τότε $|f(x)| = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$ και το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ οπότε δεν ορίζεται το $\left| \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right|$.

44) Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Ψευδής

Αν $f(x) = -x^2$ και $g(x) = x^2$ τότε κοντά στο μηδέν είναι $f(x) < g(x)$ και όμως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

45) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ τότε $x_0 = \pm\infty$.

Ψευδής

Το $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

46) Ένα όριο είναι πάντα καλά ορισμένο.

Ψευδής

Το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x}$ δεν είναι καλά ορισμένο αφού η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές του x (κοντά στον $-\infty$)

47) Αν ένα όριο είναι καλά ορισμένο τότε αυτό υπάρχει.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ενώ είναι καλά ορισμένο δεν υπάρχει $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

48) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} -1, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}$ τότε $|f(x)| = 1$ άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -1$

οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

49) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Αληθής

Αφού $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ και από κριτήριο παρεμβολής το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

50) Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει μόνον για $x_0 \in D_f$.

Ψευδής

Ορίζεται το όριο αν η f ορίζεται "κοντά" στο x_0 .

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

51) Υπάρχει συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} μη σταθερή που παίρνει μόνο ακέραιες τιμές.

Ψευδής

Γιατί αν έπαιρνε δυο διαφορετικές ακέραιες τιμές, επειδή είναι συνεχής, θα έπαιρνε από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, όλες τις τιμές μεταξύ των δυο ακεραίων άρα και μη ακέραιες τιμές.

52) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν έχει ρίζες τότε διατηρεί πρόσημο.

Ψευδής

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και είναι για $x < 0$ το $f(x) < 0$ και για $x > 0$ το $f(x) > 0$

δηλαδή διατηρεί πρόσημο και δεν έχει ρίζες.

53) Αν μια συνεχής συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$ τότε η f έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα.

Ψευδής

Η $f(x) = 5$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ έχει σύνολο τιμών το μονοσύνολο $\{5\}$.

54) Αν μια μη σταθερή συνεχής συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$ τότε η f έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα.

Σωστό

Από θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής και από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

55) Αν μια μη σταθερή συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$ τότε η f έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 2) \\ x - 2, & x \in [2, 3] \end{cases}$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $[0, 2)$.

56) Το ΘΒ ισχύει ακόμη και αν η f είναι συνεχής στο (α, β) .

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} 5, & x \in (0, 1] \\ -3, & x = 0 \end{cases}$ συνεχής στο $(0, 1)$ ως σταθερή με $f(0)f(1) = -15 < 0$ και προφανώς δεν έχει

ρίζες.

57) Αν f, g συνεχείς στο x_0 , τότε η $f \circ g$ συνεχής στο x_0 .

Ψευδής

Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x - 1$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και \mathbb{R} αντίστοιχα είναι συνεχείς στο $x_0 = \frac{1}{2}$ ενώ η $(f \circ g)(x) = \sqrt{x-1}$ δεν ορίζεται στο $x_0 = \frac{1}{2}$ οπότε δεν μπορεί να πούμε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = \frac{1}{2}$.

58) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ τότε η f παίρνει μόνον τις τιμές μεταξύ του $f(a)$ και $f(\beta)$.

Ψευδής

Η $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ με $f(-1)=1$ και $f(2)=4$ και το $f(0)=0$ που δεν βρίσκεται μεταξύ των $f(-1)$ και $f(2)$.

59) Ισχύει ότι $2018\eta\mu\frac{1}{2018} < 1$

Σωστό

$2018\eta\mu\frac{1}{2018} < 1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{1}{2018} < \frac{1}{2018}$ που ισχύει γιατί ισχύει ότι $|\eta\mu\chi| \leq |\chi|$ η ισότητα μόνον για $\chi=0$ οπότε για $x = \frac{1}{2018}$ έχουμε $\eta\mu\frac{1}{2018} \leq \left|\eta\mu\frac{1}{2018}\right| < \frac{1}{2018}$.

60) Μια συνεχής συνάρτηση f μπορεί να αλλάζει πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Ψευδής

Αν α, β δυο διαδοχικές ρίζες με $\alpha < \beta$ και αλλάζει πρόσημο στα $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$ με $\kappa < \lambda$ τότε στο $[\kappa, \lambda]$ ισχύει το θεώρημα Bolzano (συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$ και $f(\kappa)f(\lambda) < 0$) άρα θα έχει ρίζα στο $(\kappa, \lambda) \subseteq (\alpha, \beta)$ άτοπο.

61) Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $[a, \beta]$ τότε παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ $f(a)$, $f(\beta)$.

Ψευδής

Η $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 2) \\ 0, & x \in [2, 3] \end{cases}$, ορίζεται στο $[1, 3]$ και δεν παίρνει τιμές μεταξύ $f(1)=1$ και $f(3)=0$.

62) Η $f(x) = \frac{1}{x-1}$ έχει ένα σημείο ασυνέχειας.

Ψευδής

Αφού η f είναι συνεχής ως ρητή (στο πεδίο ορισμού της).

63) Αν μια συνάρτηση δεν έχει ρίζες στο \mathbb{R} τότε αυτή διατηρεί πρόσημο.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$ αυτή δεν έχει ρίζες και όμως δεν διατηρεί πρόσημο.

64) Κάθε συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} έχει ακρότατα.

Ψευδής

Η $f(x) = x$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} και ως γνησίως αύξουσα δεν έχει ακρότατα.

65) Η σύνθεση δυο ασυνεχών συναρτήσεων είναι ασυνεχής συνάρτηση.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ τότε $(f \circ g)(x) = 1, x \in \mathbb{R}$ και ενώ οι f, g δεν είναι συνεχείς στο 0 η $f \circ g$ είναι συνεχής.

66) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και στο $(\beta, \gamma]$ τότε αυτή είναι και συνεχής στο $[a, \gamma]$

Ψευδής

Η $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 2] \\ 0, & x \in (2, 3] \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ [συνεχής στο $(1, 2)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 1$] συνεχής στο $(2, 3]$ όμως δεν είναι συνεχής στο $[1, 3]$ αφού δεν είναι συνεχής στο 2 γιατί $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$.

67) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα πεπερασμένου μήκους τότε το γράφημά της γίνεται μονοκονδυλιά.

Ψευδής

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 0) \cup (0, 1]$ που είναι συνεχής σε διάστημα με πεπερασμένο πλάτος που όμως η γραφική παράστασή της διακόπτεται στο 0.

68) Αν η $|f(x)|$ είναι συνεχής στο A τότε και η $f(x)$ συνεχής στο A .

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} -1, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}$ τότε $|f(x)| = 1$ άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1 = |f(x_0)|$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -1$ και συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

69) Αν η f είναι συνεχής στο (a, β) τότε έχει και ολικό \max και ολικό \min .

Ψευδής

Αν $f(x) = x, x \in (0, 1)$ ως γνησίως αύξουσα δεν έχει ακρότατα.

70) Αν η f είναι συνεχής στο (a, β) τότε δεν έχει ολικά ακρότατα.

Ψευδής

Η $f(x) = x^2, x \in (-1, 1)$ που είναι συνεχής στο $(-1, 1)$ σαν πολυωνυμική και έχει ελάχιστο στο 0 το μηδέν.

71) Αν η $f^2(x)$ είναι συνεχής και η $f(x)$ είναι συνεχής.

Ψευδής

Αν $f(x) = \begin{cases} -1, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}$ τότε $f^2(x) = 1$ άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 1 = f^2(1)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 1$,

συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

72) Αν ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[a, \beta]$ τότε η f έχει μοναδική ρίζα στο (a, β) .

Ψευδής

Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ με πεδίο ορισμού το $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}\right]$ ισχύει το θεώρημα Bolzano και έχει ρίζες το $0, \pi, 2\pi$ περισσότερες από μία.

73) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για x κοντά στο x_0 τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{f(x)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή

τύπου $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Ψευδής

Για x κοντά στο 0 είναι $\frac{0}{f(x)} = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{f(x)} = 0$.

20 ΛΥΚΕΙΟ ΧΑΪΔΑΡΙΟΥ