

Σχολικό έτος 2020 - 2021

**ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ**

Επιμέλεια :
Γιαννάκαρος Σπύρος

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε το x_0 **δεν** είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f και είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) .

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα *Bolzano* και τη γεωμετρική του ερμηνεία.

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

β) Αν f' συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

γ) Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $D_{f \circ g} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$.

δ) Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος *Rolle* σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ στο οποίο η C_f έχει σημείο καμπής.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin f(x) - 1}{f(x)} = 0$.

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 2ο

A1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

A2. Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Πότε ένα σημείο $K(x_0, f(x_0))$ είναι **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f ;

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει ότι $f(x) < g(x)$, για κάθε x κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

β) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

γ) Ισχύει ότι $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

δ) Για δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ όταν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

ε) Αν η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (a, β) .

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 3ο

- A1.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x) = 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ .
- A2.** Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in A$;
- A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
- « Κάθε $1 - 1$ συνάρτηση είναι και γνησίως μονότονη ».
- α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.
- β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη.
- β)** Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) , η f'' γνησίως μονότονη στο (a, β) και $0 \in f''((a, \beta))$, τότε η C_f έχει σημείο καμπής σε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$.
- γ)** Κάθε συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές της ρίζες.
- δ)** Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$, τότε ισχύει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ε)** Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 4ο

- A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^v$, με $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη και στη συνέχεια ότι είναι παραγωγίσιμη και όταν $v \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$.
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;
- A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
- « Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, για κάποιο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο ».
- α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**.
- β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Αν $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = -\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .
- β)** Αν μία εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$, τότε η εξίσωση $f'(x) + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση.
- γ)** Ισχύει ότι $x < \eta \mu x < -x$, για κάθε $x < 0$.
- δ)** Μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν η f' είναι γνησίως μονότονη στο Δ .
- ε)** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) και $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, β) .

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 5ο

A1. Για μια συνεχή στο διάστημα $[a, \beta]$ συνάρτηση f , με $f(a) \neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι για κάθε κ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \kappa$.

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα *Fermat*.

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε ισχύει ότι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$xf'(x_0) - y + f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

β) Για κάθε $x < 0$ ισχύει ότι $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}$.

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε το πεδίο ορισμού της είναι και σύνολο τιμών της αντίστροφης f^{-1} .

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ , μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f , είναι διάστημα.

ε) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 6ο

A1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα *Rolle* και τη γεωμετρική του ερμηνεία.

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Υπάρχουν συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που **δεν** είναι συνεχείς και για τις οποίες ισχύει ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$, τότε η ευθεία $x = l$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$ ισχύει ότι $(a^x)' = x a^{x-1}$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

δ) Αν f' γνησίως αύξουσα σε διάστημα (a, x_0) , γνησίως φθίνουσα στο (x_0, β) και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, β) , τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ , παίρνει σε αυτό μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 7ο

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

A2. Να ορίσετε την εξίσωση της **εφαπτομένης** της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει ότι $\left| \frac{\eta \mu x}{x} \right| < 1$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 .

γ) Κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, παρουσιάζει υποχρεωτικά σε αυτό ακρότατα.

δ) Αν f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (a, β) , τότε

$$f((a, \beta)) = \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$$

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε ένα ακριβώς σημείο.

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 8ο

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) .$$

- A2.** Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Να ορίσετε τη **σύνθεση** της f με τη g .

- A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μία συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) και $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα σύνολο A και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε

$$\left(\sqrt{f(x)} \right)' = \frac{1}{2 \sqrt{f(x)}} , \text{ για κάθε } x \in A$$

β) Αν f γνησίως μονότονη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $a \in f(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $g(x) = f(x) - a$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ .

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{2v}}{x} = -\infty$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

δ) Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $f(a) \cdot f(\beta) > 0$.

ε) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 9ο

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, με

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* .$$

A2. Πότε μία συνάρτηση f είναι 1-1 συνάρτηση και πώς ορίζεται η **αντίστροφη** της στην περίπτωση αυτή ;

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Υπάρχουν συναρτήσεις $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(a) \neq f(\beta)$, για τις οποίες υπάρχει k μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ και το k να **μην** ανήκει στο σύνολο $f([a, \beta])$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μία συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της A , όταν για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x_0)$ ισχύει ότι $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in A$.

β) Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) , με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε θα είναι $f(a) \neq f(\beta)$.

γ) Αν $f'(x_0) = 1$, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

δ) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό ενός διαστήματος Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 10ο

- A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) .$$

- A2.** Να διατυπώσετε το **Κριτήριο Παρεμβολής**.

- A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για μία συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x) \neq 0$, για όλα τα x που ανήκουν σ' ένα διάστημα Δ , τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \leq k$, για κάθε $x \in A$, το k είναι (ολικό) μέγιστο της f .

β) Αν μία συνάρτηση είναι f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε θα είναι $f(a) = f(\beta)$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)}}{f(x)} = 0$.

δ) Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $g(B) \cap A = \emptyset$ τότε **δεν** ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$.

ε) Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα σύνολο A και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε

$$f(x)(\ln f(x))' - f'(x) = 0 \quad , \text{ για κάθε } x \in A$$

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 11ο

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι **τοπικό μέγιστο** της f .

A2. Πότε μία συνάρτηση f είναι **κοίλη** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια $1-1$ συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$.

β) Αν ο άξονας $x'x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στην αρχή των αξόνων, τότε υποχρεωτικά θα ισχύει $f(0) = f'(0) = 0$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ με

συντελεστή διεύθυνσης λ .

δ) Μία συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της A , όταν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A$.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{και} \quad g(x) = -\ln x$$

είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = -x$.

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 12ο

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, όπου $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = a^x \ln a, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A2. Να διατυπώσετε το **Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών**.

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, με $f''(x_0) = 0$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y = x_0$.

β) Η ευθεία $(\varepsilon) : y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x - \beta) = 0$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right] = 0$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε

$$f([a, \beta]) = [f(\beta), f(a)].$$

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε ισχύει ότι $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

ΘΕΩΡΙΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- A3.** α) Ψευδής
β) Η συνάρτηση

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα,
όμως

$$f(x) \neq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- A4.**
α) Λάθος, β) Σωστό,
γ) Λάθος, δ) Λάθος,
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

- A3.** α) Ψευδής
β) Για τις συναρτήσεις

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

και

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

ισχύει ότι $f(x) < g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
όμως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

- A4.**
α) Λάθος, β) Λάθος,
γ) Σωστό, δ) Λάθος,
ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ 3ο

- A3.** α) Ψευδής
β) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

είναι $1 - 1$ όμως **δεν** είναι
γνησίως μονότονη.

- A4.**
α) Σωστό, β) Σωστό,
γ) Λάθος, δ) Λάθος,
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 4ο

- A3.** α) Ψευδής
β) Για τη συνάρτηση

$$f(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

ισχύει ότι

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0,$$

και η f είναι γνησίως αύξουσα
στο $\mathbb{R}$, άρα **δεν** έχει ακρότατα.

- A4.**
α) Σωστό, β) Σωστό,
γ) Σωστό, δ) Λάθος,
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 5ο

- A3.** α) Ψευδής
β) Η συνάρτηση

$$f(x) = -x^3$$

είναι γνησίως φθίνουσα
στο $\mathbb{R}$, όμως

$$f'(x) = -3x^2$$

με $f'(0) = 0$.

- A4.**
α) Σωστό, β) Λάθος,
γ) Σωστό, δ) Λάθος,
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 6ο

- A3.** α) Αληθής
β) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο 0,
όμως

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

- A4.**
α) Λάθος, β) Λάθος,
γ) Σωστό, δ) Σωστό,
ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ 7ο

- A3.** α) Ψευδής
β) Η συνάρτηση

$$f(x) = |x|$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

δηλαδή **δεν** είναι
παραγωγίσιμη στο 0.

- A4.**
α) Σωστό, β) Σωστό,
γ) Σωστό, δ) Λάθος,
ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ 8ο

- A3.** α) Ψευδής
β) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$
με

$$f(0) = f(1) = 1,$$

όμως

$$f'(x) = 2x \neq 0, \forall x \in (0, 1)$$

- A4.**
α) Λάθος, β) Σωστό,
γ) Σωστό, δ) Σωστό,
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 9ο**A3. α)** Αληθής**β)** Για τη συνάρτηση

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ισχύει ότι

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 5,$$

και $f(0) < 2 < f(2)$, όμως
το 2 **δεν** ανήκει στο

$$f([0, 2]) = [0, 1] \cup (4, 5] .$$

A4.

- α)** Σωστό, **β)** Σωστό,
γ) Λάθος, **δ)** Λάθος,
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 10ο**A3. α)** Ψευδής**β)** Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ e^x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ισχύει ότι

$$f(x) \neq 0, \quad \forall x \in D_f = [0, 2]$$

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in (1, 2]$$

A4.

- α)** Λάθος, **β)** Λάθος,
γ) Σωστό, **δ)** Λάθος,
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ 11ο**A3. α)** Αληθής**β)** Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι
γνησίως αύξουσα και ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμ-
πτωτη τον άξονα $x'x$ στο $-\infty$.**A4.**

- α)** Σωστό, **β)** Σωστό,
γ) Λάθος, **δ)** Λάθος,
ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ 12ο**A3. α)** Ψευδής**β)** Για τη συνάρτηση

$$f(x) = x^4$$

ισχύει ότι $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ για
κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει
μόνο για $x = 0$. Επομένως
 $f''(0) = 0$, όμως η f είναι κυρτή
στο $\mathbb{R}$ και η C_f δεν έχει σημεία
καμπής.

A4.

- α)** Λάθος, **β)** Σωστό,
γ) Σωστό, **δ)** Σωστό,
ε) Λάθος.