

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M :

α. $f(x) = x^2 - 4x$ στο $M(3, f(3))$

β. $f(x) = x^3 - 1$ στο $M(0, f(0))$

γ. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$ στο $M(1, f(1))$

2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$ όπου :

$$f(x) = \begin{cases} x\eta\mu x, & x \leq 0 \\ x^2 + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία :

α. έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=5$

β. είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = x+5$

γ. είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: x-3y+12 = 0$

δ. είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$.

ε. σχηματίζει γωνία 135° με τον $\chi'\chi$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{16}{3}x^3 + 2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-3, -10)$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 6$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(4, f(4))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: 2x + 6y - 2015 = 0$.

Να βρείτε : α. την τιμή του α

β. την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(3, -1)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η ευθεία

$\varepsilon: y = 10x - 9$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Να βρείτε : α. τις τιμές των α και β .

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x + 2$ εφάπτεται στη C_f .

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 5)$ και η εφαπτομένη στο A έχει κλίση σε αυτό ίση με 4.
9. Αν $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 1)$ και η εφαπτομένη στο A έχει κλίση σε αυτό ίση με 8.
10. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f , όπου $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $M(2, 3)$.
11. Έστω $f(x) = 4x - x^2$ και $A(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f με $x_0 \neq 0$. Να προσδιορίσετε το x_0 αν η κάθετη της εφαπτομένης της C_f στο A διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$.
12. Έστω $f(x) = xe^{-x}$ και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$. Να προσδιορίσετε το A ώστε η εφαπτομένη της C_f στο A να διέρχεται από το σημείο $A(5x_0, 0)$.
13. Δίνεται η $f(x) = x^2 + x - 1$. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 3x - 2$ εφάπτεται στη C_f .
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β και γ για τις οποίες η ευθεία $y = 3x + \beta$ να είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 3)$.
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η ευθεία $\delta: 2x - y + 4 = 0$ είναι εφαπτομένη στο σημείο $A(1, f(1))$.
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των β και γ για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon: x + y = 0$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.
17. Αν $f(x) = x^2 - x$ να βρείτε το σημείο A της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $3x - y + 2 = 0$.
18. Έστω $A(1, \gamma)$ το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των
 $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 2$. Να βρείτε τις τιμές των α και β και γ για τις οποίες οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο A και να βρείτε την κοινή εφαπτομένη.
19. Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{2} - x^2$ να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα κοινά τους σημεία είναι κάθετες.
20. Αν $f(x) = 4x - x^2$ και $g(x) = -\frac{1}{8x}$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$ και έπειτα να αποδείξετε ότι εφάπτεται και της C_g .
21. Αν $f(x) = x^2 - 3x$ και $g(x) = \frac{\alpha}{x}$ να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για το οποίο η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ εφάπτεται και της C_g .

22. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x + f(xe^x) = e^x$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(0, f(0))$.

23. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right) + xf(-x). \text{ Αν η ευθεία } \varepsilon: y=2x+1 \text{ εφάπτεται της } C_f \text{ στο } x_1=1$$

να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $x_2 = -1$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

$$\text{Αν η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 1 \text{ και ισχύει } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x + 3}{x - 1} = 0$$

να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=2x-3$ εφάπτεται της C_f στο $x_0=1$.

25. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων: $f(x)=x^2-3x+4$ και $g(x)=x^2+x+4$.