

## ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  τέτοιες ώστε  $f'(x) - g(x) = 0$  και  $g'(x) + f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0, g(0) = 1$ . Να αποδείξετε ότι  $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  
 $\frac{f'(x)}{2} = \frac{f(x)}{x}$  για κάθε  $x > 0$ . α. Να δείξετε ότι η  $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}, x > 0$  είναι σταθερή.  
β. Αν  $f(1) = 2$  να βρείτε τον τύπο της  $f$ .
3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  
 $f(-1) = -4, f(1) = 3$  και  $f'(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2}$  για κάθε  $x \neq 0$ .  
Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .
4. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  τέτοιες ώστε  $f''(x) = g''(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = g(0) = 1$  και  $f'(1) = 3, g'(1) = 2$ . Να αποδείξετε ότι  $f(x) = g(x) + x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
5. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$  σε καθεμία από τις περιπτώσεις :  
α.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1) = 2$  και  $f'(x) + f(x) = x^2 + 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$   
β.  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1) = \frac{1-e}{e}$  και  $x^2 f'(x) - f(x) = 1$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .
6. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f'(x) + 2f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 3$ .
7. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $x^2 f'(x) + 2xf(x) = x^2 f(x)$  για κάθε  $x > 0$  και  $f(1) = e$ .
8. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$  που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, \frac{\pi}{2})$  με  $f(\frac{\pi}{3}) = \ln 2, f'(\frac{\pi}{4}) = 1$  και τέτοια ώστε  $f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$  για κάθε  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .
9. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$  που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) = f'(0) = 1$  και τέτοια ώστε  $f''(x) - f'(x) = 6x - 3x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
10. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$  που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) = 0, f'(0) = 1$  και τέτοια ώστε  $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
11. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f'(x-2) = 2x+3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(1) = 2$ .