

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

1. Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος της

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2, & \text{αν } x < 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 1$$

$$\beta. f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & \text{αν } x < 0 \\ x - \eta\mu x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 0$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} x^2 \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 0$$

2. Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος της

$$\alpha. f(x) = x^2 + |x - 3|$$

$$\beta. f(x) = |x + 2| - 3x + 1$$

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x \cdot \sqrt{x + 4}, & \text{αν } x \geq 0 \\ e^x \sqrt{x^2 + 9}, & \text{αν } x < 0 \end{cases} \quad \text{είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0$$

4. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ να αποδείξετε ότι η

$$g(x) = f(x) \cdot \eta\mu^2 x \quad \text{είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0.$$

5. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} = 2. \quad \text{Αν η } f(x) \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 1 \text{ να αποδείξετε ότι}$$

είναι και παραγωγίσιμη.

$$6. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x > 1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\alpha + 1, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$7. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x > 0 \\ \eta\mu x + (\beta - 2)x + 2\alpha - 2, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta \mu x}{x^2 + x} = 2.$$

α. Να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνει τον γ' γ καθώς και το $f'(0)$.

β. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(4x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{x^2 - x}$

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(1)=2$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = -2$.

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h - \eta \mu 3h}$

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 3}{x^2 - 4} = 1$$

α. Να βρείτε το $f(2)$ καθώς και το $f'(2)$.

11. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ισχύει :

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3x\eta \mu y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 3x_0 + f'(0)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 2xf^2(x) + 2x^2f(x) = x^2\eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(0)=5$.

Να υπολογίσετε τα όρια : α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{x}$ και β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x}$