

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x)\eta\mu\frac{\pi}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2, & \text{αν } x \leq -1 \\ ax + \beta, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ \ln x + 3x + 4, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \beta - 10, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής.

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - \eta\mu x \cdot \eta\mu 3x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = 8. \text{ Να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνει τον γ'γ.}$$

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) = \sqrt{x^2 + 5} + 2f(x) - 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε το } f(2)$$

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) - \eta\mu 3x \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε το } f(0)$$

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^2(x) - 4xf(x) \leq -3x^2 - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Βρείτε το $f(1)$.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-4x}{x-2}, & \text{αν } x < 2 \\ -x^2 + \kappa, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

α. Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \eta \mu \frac{1}{x})$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+\lambda x}{x-3}, & \text{αν } x < 3 \\ x^2 + x + \mu, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$

α. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής.

β. Αν η f είναι συνεχής να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 6x}{f(x)}$

11. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(3h)}{h-1} = 6$. Να βρείτε :

α. το $f(3)$ β. το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{\sqrt{x^2+7}-4}$ γ. το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3}$

12. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ για την

οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+x^2+x-2}{x-2} = 9$.

α. Να βρείτε το $f(2)$

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$

γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-4x+4}$

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)+\eta \mu(x-2)}{x^2-4}$

13. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει :

$f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$.

α. Να βρείτε το $f(1)$

β. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta \mu 3x}{\sqrt{x^2+4}-2} = 2016$ και $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2xy(x+y) - 3$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι :

α. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

15. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε : $2f^3(x) + f(x) = 6x, x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. β. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$