

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(1+\lambda \ln x) - 3(\lambda+1)x - 4\ln x$. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στο $\chi'\chi$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3x + 1, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 + \beta x - \gamma, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, για την οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.
 - α. Να βρείτε τις τιμές των α, β και γ .
 - β. Να επαληθεύσετε ότι ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, βρίσκοντας ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ για το οποίο $f'(x_0) = 0$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ ax^2 + \beta x - 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β για την οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[0, 2]$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-1}{4}\right)x^3 + \left(\frac{\beta-2\gamma}{3}\right)x^2 + \frac{2\gamma}{3}x + \mu$. Αν $3\alpha+4\beta=3$ και $\alpha \neq 1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στο $\chi'\chi$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (2 - \beta + \gamma)x^2 + (\beta + \gamma)x + 1 + \beta - 2\gamma$. Να βρείτε τις τιμές των β, γ για τις οποίες η f ικανοποιεί το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 6)$. Στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $x_0 \in (-1, 1)$ για τα οποία $f'(x_0) = 0$.
6. Έστω δυο συναρτήσεις f και g με τις εξής ιδιότητες :
 - i) Είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β)
 - ii) $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
 - iii) $f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\beta) = 0$ να δείξετε ότι :
 - α. Για την $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$
 - β. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$
7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x^2 = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δυο ρίζες.
8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x = \eta \mu x + 1$ με η έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.
9. Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2x-1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 - x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.
10. Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$

Να δείξετε ότι η C_f και η ευθεία $y = 2x$ έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

11. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 + 3\lambda x^2 + 2(\lambda - 2)x - 2\lambda + 1 = 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

12. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f(2) - f(1) = 16$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 3\xi^2 + 6\xi$

13. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 2]$ παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f(1)=1$ και $f(2)=2$. Να αποδείξετε ότι :

α. υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)(\xi_1 - 3) = -f(\xi_1)$

β. υπάρχει $\xi_2 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\xi_2)}{\xi_2}$

14. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^4 + 2\lambda x - \lambda - 1 = 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

15. Αν $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

16. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^4 + 4\alpha x^3 - 1 = \alpha$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

17. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f(\kappa) = \lambda^2$ και $f(\lambda) = \kappa^2$ και $\kappa > \lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\lambda, \kappa)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -2\xi$.

18. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο (e, e^2) , συνεχής στο $[e, e^2]$, για την οποία ισχύει : $f(e^2) = 2f(e)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \cdot \ln \xi = f(\xi)$.

19. Δίνεται μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει : $f(\alpha) = f(\beta)$ και $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(x_1) = f''(x_2)$.

20. Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει : $f(1) - f(0) = 2$ και $f''(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4\xi^3 + 2\xi$.

21. Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $xf'(x) - x \neq -1$ για κάθε $x > 0$. Αν $2 < 2f(x) < 3$ για κάθε $x \in [1, e]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό

$x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0 - \ln x_0$.

22. Δίνεται μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(1)=1$, $f(2)=4-\ln 2$ και $f(e)=e^2-1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + 2$.
23. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $1 < f(x) < 2$ και $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Να αποδείξετε ότι C_f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ακριβώς ένα σημείο.
24. Δίνεται μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ για την οποία ισχύει $f(2)=2f(1)$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = xf'(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, 2)$.
25. Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$ με $f''(x) \neq 2$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, 1]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ στο οποίο οι εφαπτομένες στη C_f και στη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2-x$ είναι παράλληλες.
26. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=e^6$ και $f(3)=e^{-3}$.

Να αποδείξετε ότι :

- α. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = -3f(x_1)$.
- β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) + 2x_2f(x_2) = 0$.
27. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(1)=4$ και $f(2)=3$. Να αποδείξετε ότι
- α. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0^2$.
- β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + \xi f'(\xi) = f'(\xi) + 3\xi^2 - 2\xi$
28. Δίνεται μια συνάρτηση f με $x^2 f''(x) \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2)-f(1)=\ln 2-1$. Να δείξετε ότι οι C_f' και C_g' όπου $g(x) = \ln x - x$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο $(1, 2)$.
29. Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $[2, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ με $f(3) = 2f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το $A(1, 0)$.
30. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- B. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 2) - f(4x - 1) = 0$.
- Γ. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-1, -5)$ και η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f(x) + 7) = 1$.