

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x + 6, & \text{αν } x \leq -1 \\ 3x^2 + 7x + 7, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$
 - α. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ για την f στο διάστημα $[-3, 1]$.
 - β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-3, 1)$ για το οποίο $f'(\xi) = 2$ και στη συνέχεια να βρείτε μια τιμή του ξ που ικανοποιεί αυτή τη σχέση.
2. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει :
 $f(\alpha) = 3\alpha - \beta$ και $f(\beta) = \alpha + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε : $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$.
3. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f(15) = f(3) + 8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (3, 15)$ διαφορετικά ανά δυο τέτοια ώστε :
 $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) = 4$.
4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f(1) = 2$ και $f(3) = 6$. Να αποδείξετε ότι :
 - α. υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 8 - 2\xi$
 - β. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 3)$ διαφορετικά μεταξύ τους ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 4$.
5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f(-5) = -2$ και $f(1) = 4$. Να αποδείξετε ότι :
 - α. υπάρχει $x_0 \in (-5, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$
 - β. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-5, 1)$ διαφορετικά μεταξύ τους ώστε :
$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2.$$
6. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει : $f(1) = \alpha + 2\beta$, $f(2) = 2\alpha + 3\beta$ και $f(3) = 3\alpha + 4\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

7. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)=e$ και $f(\beta) = -e$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε :

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{\alpha - \beta}{e}.$$

8. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα

$$[2020, 2024] \text{ για την οποία ισχύει: } 2f(2022) = f(2020) + f(2024).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2020, 2024)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

9. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ για την οποία ισχύει: $f(1) = 2023$ και $-1 \leq 2f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (1, 3)$. Να αποδείξετε ότι $2022 \leq f(3) \leq 2024$.
10. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 5]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$ για την οποία ισχύει: $f(1) = 3$ και $0 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (1, 5)$. Να αποδείξετε ότι $3 \leq f(5) \leq 23$.
11. Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ και στη συνέχεια να δείξετε ότι :

$$|\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha| \leq |\beta - \alpha|$$

12. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[2, 6]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 6)$ για την οποία ισχύει: $f(2) = -6$ και $1 < f'(x) < 2$ για κάθε $x \in (2, 6)$. Να αποδείξετε ότι $|f(6)| < 2$.
13. Για κάθε $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ με $\alpha \leq \beta$ να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\beta - \alpha}{\eta \mu^2 \beta} \leq \sigma \varphi \alpha - \sigma \varphi \beta \leq \frac{\beta - \alpha}{\eta \mu^2 \alpha}$$

14. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty)$ για την οποία ισχύει :

$f(0) = 2$, $f'(0) = 1$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει ότι $x + 2 \leq f(x) \leq xf'(x) + 2$.

15. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[2, 10]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 10)$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, 10)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(4) + f(8)$ και $f(2) + f(10)$.