

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ - ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

1. Να αποδείξετε ότι :

α. η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$.

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

α. $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3$ β. $g(x) = x + \sin x - 5$

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

α. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$ β. $g(x) = 2\eta\mu x - x, x \in [-\pi, \pi]$

γ. $h(x) = \frac{x^2+4}{x}$ δ. $k(x) = x^2(2\ln x - 5) - 4x(\ln x - 3)$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ -2x^3 + 9x^2 - 12x + 4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

5. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{αν } x < 3 \\ e^x(x - 3), & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{και στη συνέχεια να εξετάσετε αν είναι} \\ \text{γνησίως αύξουσα στο } [1, +\infty)$$

6. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & \text{αν } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 6, & \text{αν } x > 2 \end{cases} \quad \text{και στη συνέχεια να εξετάσετε αν} \\ \text{είναι γνησίως αύξουσα στο } [1, 3]$$

7. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

α. $f(x) = -2x^2 + 4x - (x-1)\ln x$ β. $g(x) = 2e^x - x^2 - 2x$

γ. $h(x) = 6x^2 \cdot \ln x - 2x^3 - 3x^2 + 6x$

8. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$

9. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = 8x^3 - 3(\lambda + 3)x^2 + 6\lambda x - 2 \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha. x^2 + 6\ln x = 4x - 3$$

$$\beta. x^2 + 4x + 5 = 5e^x$$

$$\gamma. x \ln x = 2x - e$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$

α. Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

$$\beta. \text{ Να λύσετε την εξίσωση } \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1} = x^2 - 4$$

12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3e^x + x^3 = 3x^2 - 3x$ έχει μοναδική λύση, η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sin x$

α. Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

$$\beta. \text{ Να λύσετε τις ανισώσεις } \text{ i. } 2\sin x < \pi - 2x$$

$$\text{ ii. } \sin(|x| - 1) - \sin(3|x| - 7) < 2|x| - 6$$

14. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha. e^x \geq 1 - \sqrt{x} \text{ για κάθε } x \geq 0 \quad \beta. e^x \geq x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma. \ln(x+1) < e^x - 1 \text{ για κάθε } x > 0$$

15. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} - \sqrt{1-x}$

16. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$

17. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 1 - x$ έχει μοναδική ρίζα.

18. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$e \cdot \ln x + x^2 = 2(e + 1)x - 7$$