

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 1$ β. $g(x) = x^2 + 8\sqrt{25 - x^2}$

2. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

3. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης :

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8, & \text{αν } x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 2, & \text{αν } -1 < x < 3 \\ x^2 - 8x + 14, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3(\alpha + 2)x^2 + 6a^2x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ τοπικό ακρότατο το 5.

6. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f^3(x) + 3f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$
α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
γ. Αν ισχύει $f(\alpha + \beta) = -f(3\alpha + 4\beta)$ να βρείτε τους αριθμούς α, β .

8. Να αποδείξετε ότι :

α. $e^x - 1 \leq xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. $e^{x-1} \geq 1 + \ln x$ για κάθε $x > 0$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x - 2x + 1$
α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x \ln x - x^2 - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = e^{1-x} \cdot x \quad \text{και} \quad g(x) = 2\eta\mu x + (x - 1)^2$$

- α. Να μελετήσετε τις f, g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β. Να αποδείξετε ότι $e^{1-x} \cdot x - 2\eta\mu x \leq (x - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(1) < f(0) < f(3) < f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.
12. Για τον πραγματικό αριθμό $\alpha > 0$ ισχύει ότι $\alpha^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.
13. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=2$ και $f(x) \geq e^x + \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.