

ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

$$\alpha. f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$\beta. g(x) = \frac{x^2+3|x|}{x^3-9x}$$

$$\gamma. h(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\delta. f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\epsilon. g(x) = x^3 \ln \frac{2-x}{2+x}$$

$$\sigma\tau. h(x) = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{4-x}}$ και $g(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{4-x}}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x^3-x}{x-2}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$

3. Αν $f(x) = \begin{cases} x-3, & -1 \leq x \leq 1 \\ 5-3x, & 1 < x \leq 3 \\ 2x+1, & x > 3 \end{cases}$ και

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x < 2 \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \text{να ορίσετε τη συνάρτηση } f+g$$

4. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$

να ορίσετε τη συνάρτηση $f+g$ και $\frac{f}{g}$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις f, g των οποίων οι τύποι δίνονται παρακάτω είναι ίσες.

Αν $f \neq g$ να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι $f = g$

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ και $g(x) = |x - 1|$

β. $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln |x|$

γ. $f(x) = \frac{x^2-4}{|x|-2}$ και $g(x) = |x| + 2$

δ. $f(x) = \sqrt{x} - 2$ και $g(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$f_3(x) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$$

$$f_4(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}}$$

$$f_5(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f_6(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη ίσων συναρτήσεων.

γ. Να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι όλες ίσες

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) + 8x^2 \leq 4x(f(x) + g(x)) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι είναι ίσες.}$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) \leq 2(f(x) + g(x)) - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι είναι ίσες.}$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^9 - x^6$ και $g(x) = x^{2015} - x^{2016}$

Να εξετάσετε αν είναι ίσες.

6. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ και

$$g(x) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) \text{ είναι ίσες}$$

7. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε να είναι ίσες οι

$$\text{συναρτήσεις: } f(x) = \frac{2\lambda^2 x + \lambda}{x + 1 - \lambda} \text{ και } g(x) = \frac{(3\lambda - 1)x + \lambda}{x + \lambda}$$

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων :

$$\alpha. f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

$$\beta. g(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

$$\gamma. h(x) = \ln \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\delta. f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\epsilon. g(x) = \sqrt{5-x}$$

$$\sigma\tau. h(x) = \ln(x-5)$$

$$\zeta. f(x) = \sqrt{x^2-9}$$

$$\eta. g(x) = \ln(x^2-4)$$

$$\theta. h(x) = e^{2x-1}$$