

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ "1-1"

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1"

α. $f(x)=2x-7$ β. $g(x)=\frac{3-x}{3+x}$ γ. $h(x)=2\ln x-3$

δ. $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2015$ ε. $g(x)=x^{2015}-x^{2013}+x^{1940}+x^2-1=0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $(f \circ f)(x)=f(x)+5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι "1-1" και $f(0)=0$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^3(x)+2f(x)=3x^{2015}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι "1-1"

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x^3-2x)=f(x-2)$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $(f \circ f)(x)-f(x)=2x-4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι "1-1"

β. Να βρείτε το $f(2)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(4-f(x^2+x))-2=0$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^2(x^2)+9 \leq 6f(2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση ΔΕΝ είναι "1-1"
6. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει "1-1" συνάρτηση f τέτοια ώστε

$f(2015x+1)+f(2015x+2)+f(2015x+3)=2016$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε :

$(g \circ f)(x)=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1"

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-5x+2)=f(4x-6)$

8. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η f είναι "1-1" και ισχύει : $2g(x)+f(x-9)=g(g(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η g είναι "1-1"

9. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η $f \circ g$ να είναι "1-1". α. Να αποδείξετε ότι και η g είναι "1-1"

β. Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ την εξίσωση :

$g(f(x)+x^3-6x)=g(x-6+f(x))$

10. Να προσδιορίσετε την "1-1" συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$(f \circ f \circ f)(x-1) = (f \circ f)(x+2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x)) = f^7(x) - 2f^5(x) + e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1"

β. Να βρεθεί ο θετικός αριθμός x , αν $f(x^3 - 2) = f(x - 2x^2)$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x)) = ax + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1" και $f(0) = 0$

13. Να λύσετε την εξίσωση $e^{4x^2+2} - e^{x^4+2} = \ln \frac{x^4+2}{4x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(1) = 0$ και ότι f είναι "1-1".

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3e^{x-2} - 5$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

β. Να ορίσετε την f^{-1}

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \sqrt{e^x - 1}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

β. Να ορίσετε την f^{-1}

3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι "1-1"

β. Να βρείτε την αντίστροφή της.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(f \circ f)(x) + 3f(x) = x$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται

β. Να βρείτε την αντίστροφή της.

6. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f^2(x) \leq f(x)f(10-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι δεν αντιστρέφεται.
7. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $12f(x^2) - 4f^2(x) \geq 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι δεν αντιστρέφεται.
8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [0, 1]$
α. Να βρείτε την f^{-1}
β. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$
9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + 2x + 2$
α. Να εξετάσετε τη μονοτονία της f .
β. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$
10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x-3} + x - e^2$
α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$
γ. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(2\ln x + 2) = f^{-1}(\ln^2 x - 1)$
11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι "1-1" και τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(5, 9)$ της γραφικής παράστασης της f .

Να λύσετε την εξίσωση $f(3 + f^{-1}(x^2 + 2x)) = 9$
12. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(5, 9)$

α. Να λύσετε την εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$
13. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(3, 4)$. Να λύσετε την εξίσωση $f(1 + f^{-1}(x - 1)) > 4$