

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

Να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα όρια :

1. α. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x + 6)$ β. $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{5})$
 γ. $\lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 + 1)^{1821} \cdot |x^{107} - 1|]$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όπου $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ x^3 - 1, & x < 1 \end{cases}$
3. α. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$ β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{3x^2 + x - 4}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$
 δ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\nu+1} - (\nu+1)x + \nu}{x-1}$
4. α. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x-1} \right)$ β. $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{2x}{x^2 + 4x + 3} - \frac{3}{x^2 + 7x + 12} \right)$
5. α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3x}{x-1}$ β. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x+3} - 2}$
 δ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x+3} - 2}$ ε. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ στ. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{2 - \sqrt{3x-8}}$
6. α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1}$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x^2 - x}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x} - 1}$
 δ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ε. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x^2 - 16}}$
 στ. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x+4} + 2\sqrt{x+5} - 5}{\sqrt{x+1}}$ ζ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{3x-1} - \sqrt{x+1}}{x-3}$
7. α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-2| + 3|x| - 10}{x^2 - 3x + 2}$ β. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-3| + 5|1-x| - 10}{x^2 - 9}$
 γ. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x^2 - 9| + |x^2 - x - 12|}{|x+3| - |x^2 + 8x + 15|}$
8. α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x}$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2 + \sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^2 x}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x + \eta\mu x}{x}$
9. δ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu x}{x\eta\mu x}$ ε. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \varepsilon\varphi x}{x^3}$
10. α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\eta\mu(\beta x)}$ α, β ∈ ℝ* β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu(2x) + \eta\mu(3x) + \dots + \eta\mu(\nu x)}{x}$, ν ∈ ℕ*
11. α. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^4 - 2x^3}{x^2} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right]$ β. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1) \sigma\upsilon\nu \frac{2015}{x-1} \right]$
 γ. $\lim_{x \rightarrow -2} \left[(x+2) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x^2 - 4} - 3x + 2 \right]$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

1. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $5x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα όρια : α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$
2. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $|f(x) \cdot \eta\mu x - 3x| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθούν τα όρια : α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) + \eta\mu x}{3x - \eta\mu x}$
3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf(x) \leq \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ με την προϋπόθεση ότι υπάρχει και είναι $l \in \mathbb{R}$.
4. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$\sqrt{3x+3} \leq (x-2)f(x)+3 \leq 3\sqrt{x+7}-6, x \in (1,3).$$

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

5. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $2\sqrt{3x} \leq f(x) \leq x+3$ για κάθε $x \geq 0$ να υπολογίσετε τα όρια : α. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-6}{x-3}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2x}{x-3}$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-x^2+3}{x^2-9} \quad \epsilon. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|2-f(x)|-4}{x-3}$$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει : $f^2(x) + g^2(x) + \sin^2 x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα όρια :
α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

ΚΡΥΜΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3xf(x)-2}{x^2+f(x)} = -2$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
2. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)-x^2}{x^3-1} = 3$ να βρείτε τα όρια :
α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x^2-1}$ β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}$
3. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2\sin x}{x^2} = 1$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x}$
4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} [5f(x) + 2g(x)] = 2$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} [7f(x) + 3g(x)] = 1$ να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
5. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x)-f(-x)\cdot\eta\mu(3x)}{2x^2-\eta\mu^2 x}$
6. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|2f(x)-11|-1}{f(x)-5}$
7. Δίνονται οι συναρτήσεις g, h για τις οποίες ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2g(x)-4}{x-2} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{h(x)} = 1$$

α. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

β. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x) \leq f(x) + |x - 2| + \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \leq h(x) + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{2\} \text{ να υπολογίσετε}$$

το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(-x)}{x} = 3 . \text{ Να υπολογίσετε τα όρια :}$$

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x)}{x^2 + f^2(x)}$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

1. Να βρεθεί $\alpha \in \mathbb{R}$ όταν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + 4\alpha x^2 + a^2 x - 2}{x-2} = 9$
2. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha x^4 + (\alpha - \beta)x^3 - \beta x^2}{|x+1|} = 0$
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & x < 3 \\ x^2 + \beta x - \alpha, & x > 3 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός και ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων α, β .
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^3 + (\beta^2 + 4)x, & x < 1 \\ 4\alpha x^2 + 2\beta x - 1, & x > 1 \end{cases}$
Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
5. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3\alpha x + \beta + 4}{3x - 9} = 2$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΑ ΟΡΙΑ

1. Για τη συνάρτηση f υποθέτουμε ότι ισχύει : $f(x+y) = f(x) \cdot \eta\mu y + f(y) \cdot \eta\mu x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και περιττή στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f(x) - x|}{x^2 - 9} = 2$
Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$
3. Αν f μια άρτια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -2$
Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -4} \left[f(x) + \frac{1}{x+4} + \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 16} \right]$