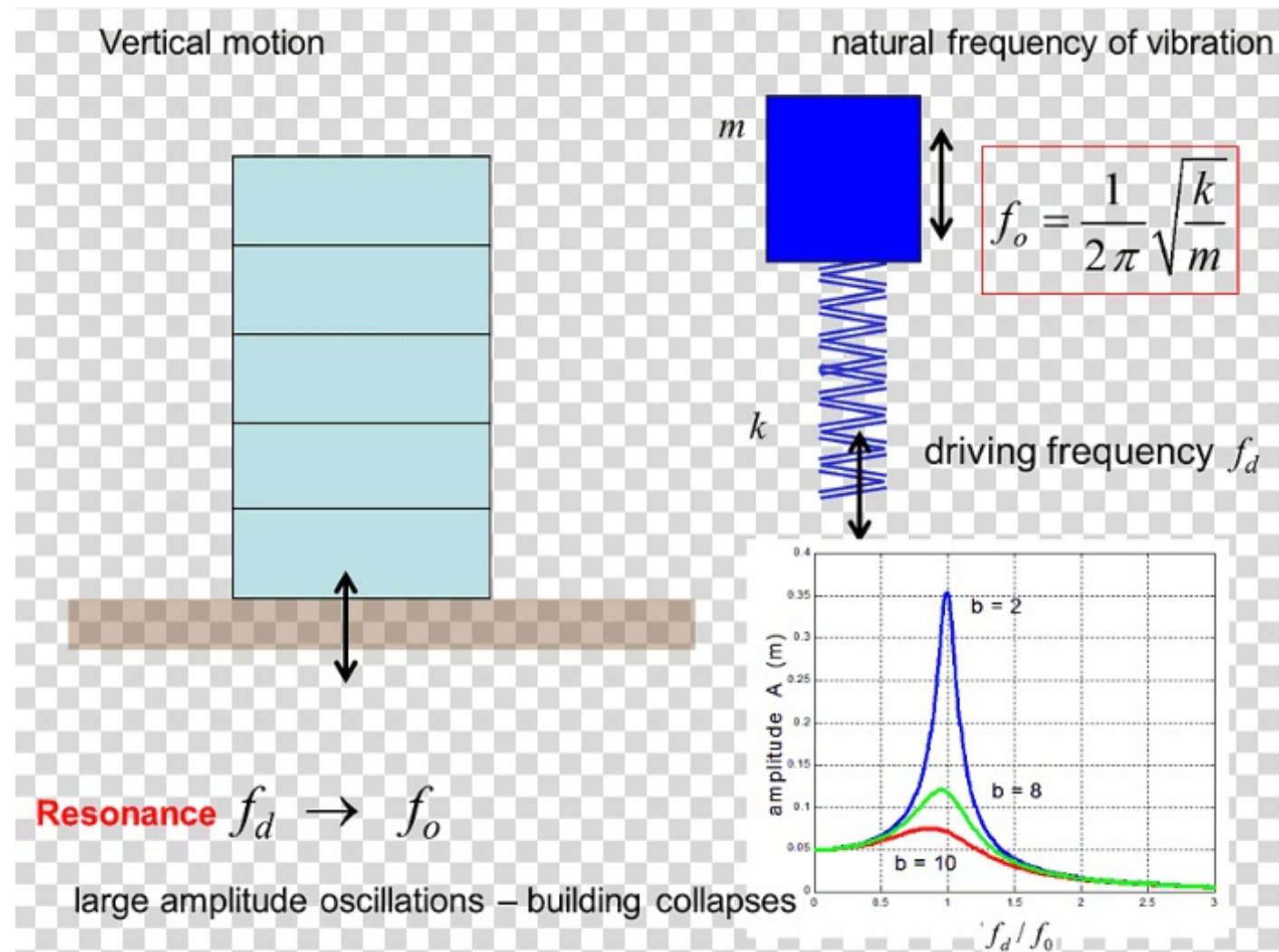


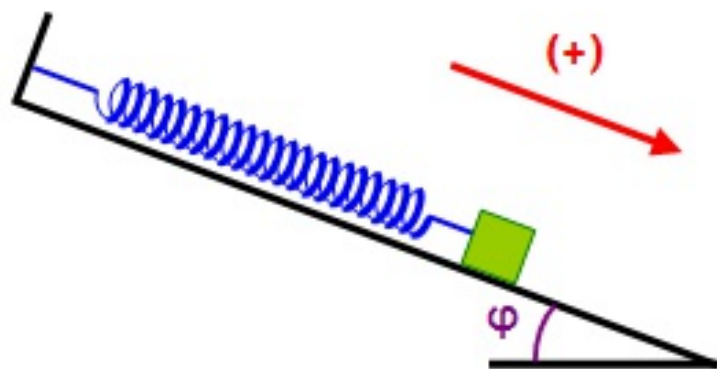
# ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ



Επιμέλεια: Τζένη Ποτηριάδου  
Φυσικός MSc



Ένα σώμα μάζας  $m = 4\text{kg}$  ισορροπεί πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία  $\varphi = 30^\circ$ . Το σώμα είναι δεμένο στην άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εκτρέπουμε το σώμα κατά  $0,1\text{m}$  από τη θέση ισορροπίας του προς τα κάτω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  το αφήνουμε ελεύθερο. Θεωρώντας θετική τη φορά του σχήματος:



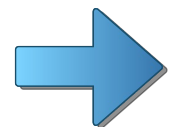
**Δ1)** Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

**Δ2)** Να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει πως μεταβάλλεται η επιτάχυνση του σώματος σε σχέση με το χρόνο κατά τη διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

**Δ3)** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος στη

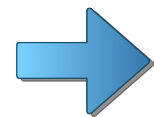
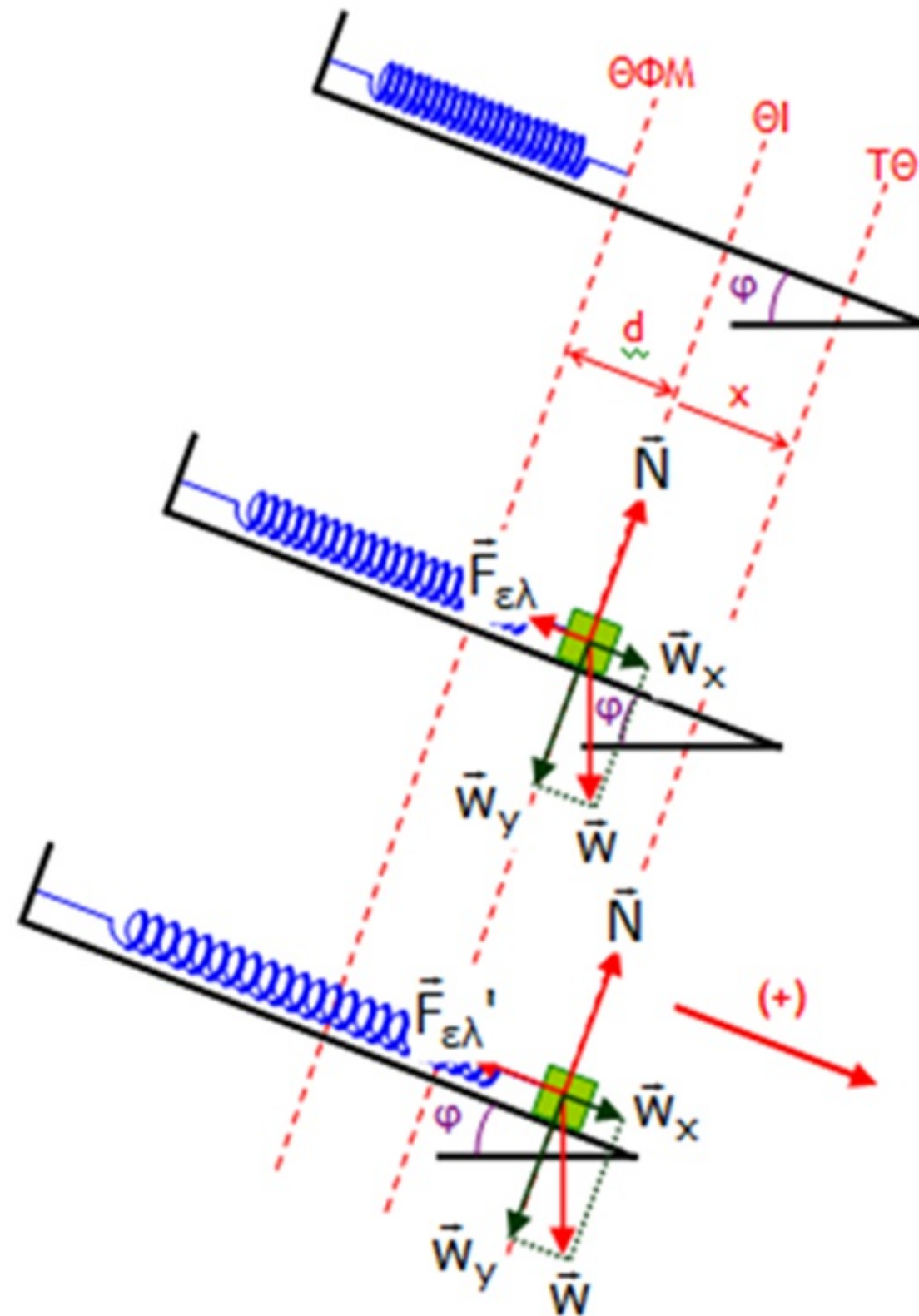
θέση  $x = -\frac{A}{2}$ , όπου  $A$  το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

**Δ4)** Να υπολογίσετε την επιπλέον ενέργεια  $W$  που πρέπει να δοθεί στο σύστημα, προκειμένου να διπλασιαστεί το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης.



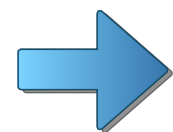
# Λύση

Δ1)



- Σχεδιάζουμε το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους ( $\Theta\Phi\text{M}$ ).
- Σχεδιάζουμε το σύστημα που ταλαντώνεται στη θέση ισορροπίας ( $\Theta\text{I}$ ) και σε μια τυχαία θέση ( $\text{T}\Theta$ ).
- Ονομάζουμε  $d$  την απόσταση  $\Theta\Phi\text{M} - \Theta\text{I}$  και  $x$  την απόσταση  $\Theta\text{I} - \text{T}\Theta$  (Τυχαία Θέση).
- Σχεδιάζουμε τις ασκούμενες δυνάμεις στη  $\Theta\text{I}$  και στην  $\text{T}\Theta$ .
- Στη  $\Theta\text{I}$  ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w}_x = 0 \Rightarrow kd = w_x \quad (1)$$



- Στην ΤΘ ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_{ελ}' + \vec{w}_x \Rightarrow \Sigma F = -k(d+x) + w_x \Rightarrow \Sigma F = -kd - kx + w_x$$

Με αντικατάσταση της (1) έχουμε:

$$\Sigma F = -kx$$

- Αυτή η εξίσωση είναι της μορφής  $\Sigma F = -Dx$  , η οποία αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη απλής αρμονικής ταλάντωσης. Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με  $D = k$  .

**Δ2)** Από τη σχέση  $D = m\omega^2$  , θέτοντας  $D = k$  , υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow 100 \frac{N}{m} = 4kg \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 5 \frac{rad}{s}$$



Επειδή εκτρέψαμε το σώμα κατά  $0,1m$  από τη θέση ισορροπίας του προς τα κάτω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και το αφήσαμε ελεύθερο, το πλάτος της ταλάντωσης είναι  $A = 0,1m$ .

Από τη σχέση  $a_{\max} = \omega^2 A$  υπολογίζουμε τη μέγιστη επιτάχυνση:

$$a_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow a_{\max} = 2,5 \frac{m}{s^2}$$

Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του. Επομένως:

$$t_0 = 0 \begin{cases} x = +A \\ v = 0 \end{cases}$$



Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του. Επομένως:

$$t_0 = 0 \begin{cases} x = +A \\ v = 0 \end{cases}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση της απομάκρυνσης

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

έχουμε:

$$A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των  $a_{\max}$ ,  $\omega$  και  $\varphi_0$  στην εξίσωση της επιτάχυνσης, έχουμε:

$$a = -a_{\max}\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = -2,5\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) (SI)$$



**Δ3)** Σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> Νόμο Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη (δύναμη επαναφοράς). Με αντικατάσταση έχουμε:

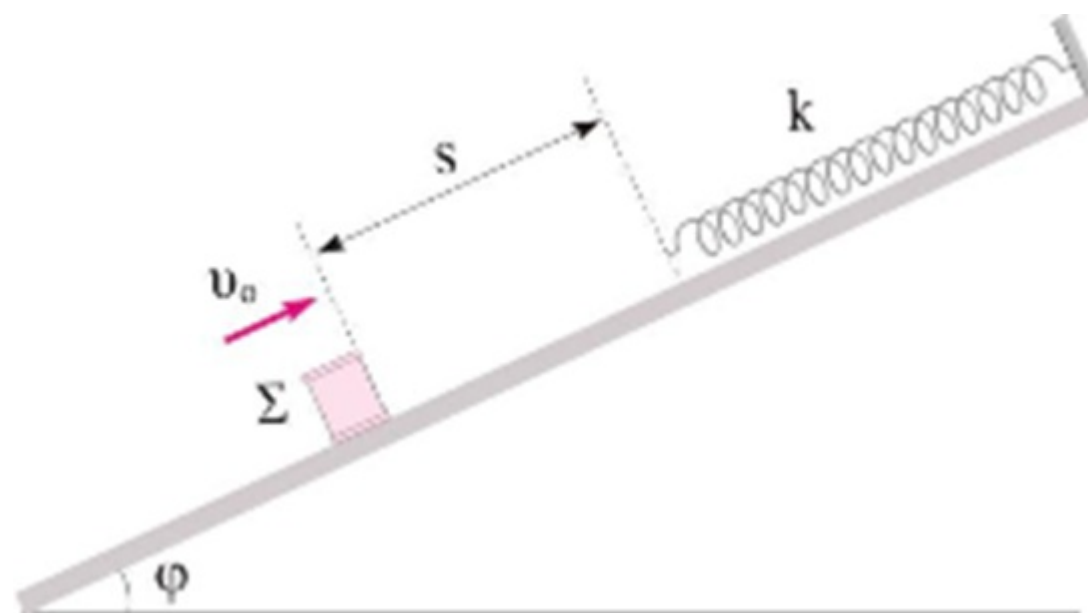
$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -Dx \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -100 \cdot \left(-\frac{0,1}{2}\right) kg \frac{m}{s^2} \Rightarrow$$
$$\frac{dp}{dt} = 5 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

**Δ4)** Αν η αρχική ενέργεια ταλάντωσης είναι  $E$  και η τελική ενέργεια ταλάντωσης είναι  $E'$ , η διαφορά των δύο ενεργειών οφείλεται στην επιπλέον ενέργεια  $W$  που θα δοθεί στο σύστημα. Επομένως:

$$W = E' - E \Rightarrow W = \frac{1}{2}D(2A)^2 - \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow W = \frac{3}{2}kA^2 \Rightarrow$$
$$W = 1,5J$$

2

Η μια άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k = 100 \text{ N/m}$  είναι στερεωμένη στο πάνω μέρος του λείου, πλάγιου επιπέδου γωνίας  $\varphi = 30^\circ$ , όπως στο σχήμα. Από ένα σημείο του πλάγιου επιπέδου που απέχει  $s = 0,25 \text{ m}$  από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα  $v_0 = 2 \text{ m/s}$ , κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου προς τα πάνω ένα σώμα  $\Sigma$  μάζας  $m = 2 \text{ kg}$ . Όταν το σώμα ακουμπήσει στο ελατήριο, ενώνεται με αυτό και αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση.



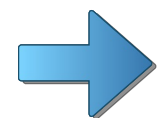
**Δ1)** Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

**Δ2)** Να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

**Δ3)** Να γράψετε τη συνάρτηση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο, θεωρώντας  $t = 0$  τη στιγμή της ένωσης του σώματος με το ελατήριο και τα θετικά προς τα πάνω.

**Δ4)** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας του σώματος τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο εκτόξευσης για δεύτερη φορά.

Δίνεται  $g = 10 \text{ m/s}^2$



## Λύση

α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για το σώμα Σ από τη θέση (Α) μέχρι τη θέση (Β) λίγο πριν έρθει σε επαφή με το ελατήριο.

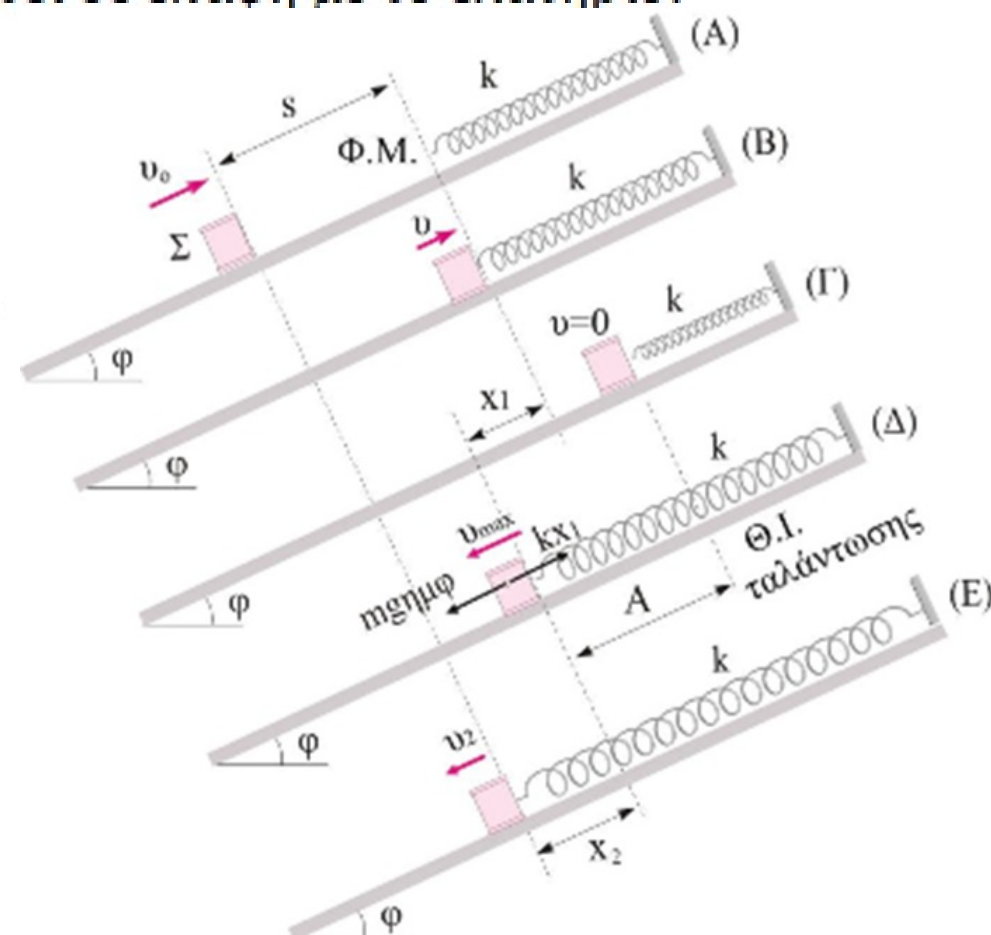
$$K_{(B)} - K_{(A)} = W_{ολ} \quad \text{ή}$$

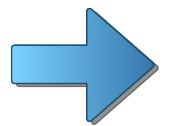
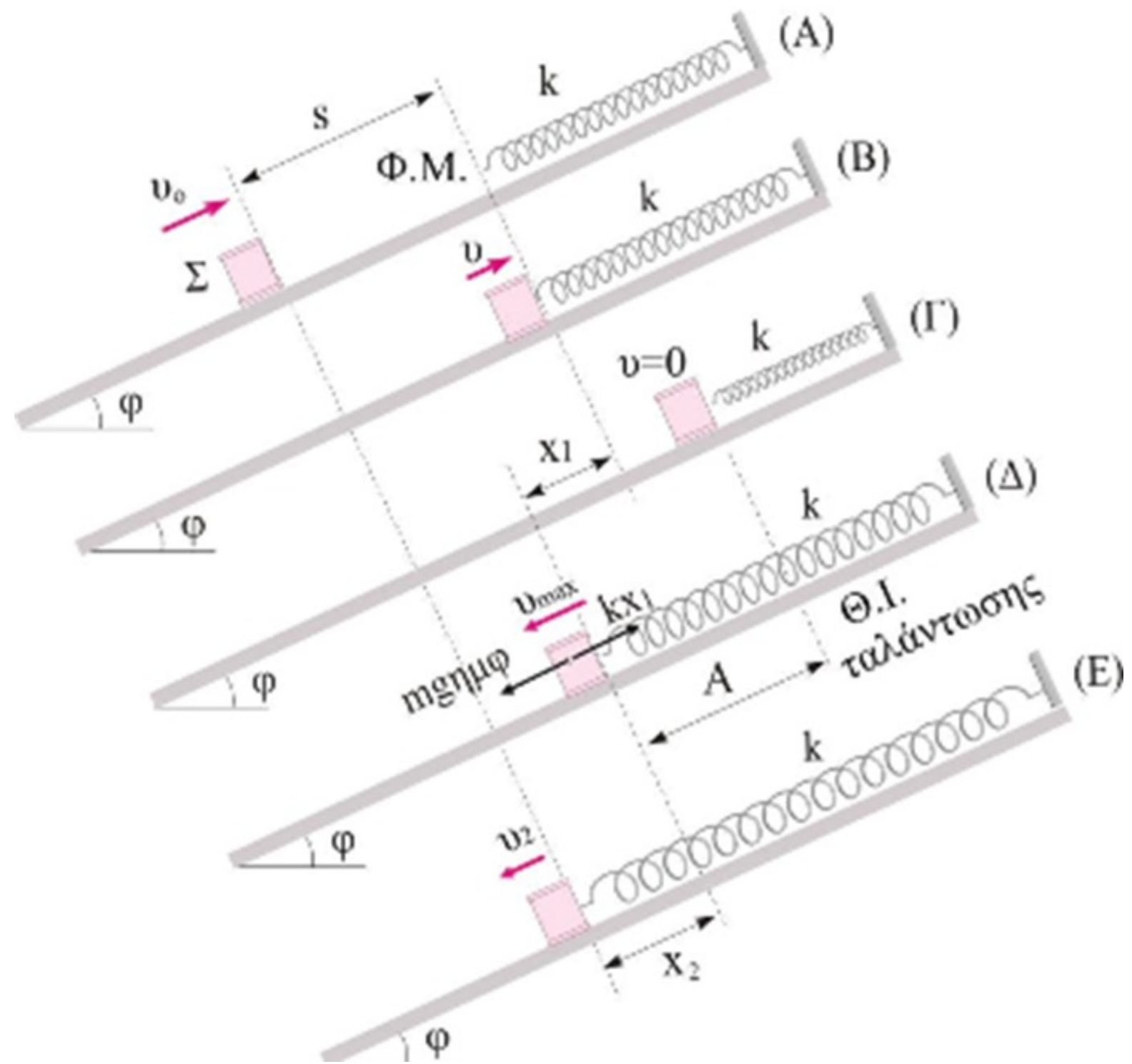
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -mg \cdot \eta \mu \varphi \cdot s \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_o^2 - 2g \cdot \eta \mu \varphi \cdot s} =$$

$$= \sqrt{(2\text{ m/s})^2 - 2 \cdot 10\text{ m/s}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25\text{ m}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{1,5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$





Δ2) Για να βρούμε τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, θα εφαρμόσουμε την διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση μεταξύ των θέσεων (B), όπου το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο με ταχύτητα μέτρου  $v$  και στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (Δ) όπου το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.

Στη Θ.Ι. ασκούνται στο σώμα οι δυνάμεις μημφ και η δύναμη του ελατηρίου ( $kx_1$ ) οι οποίες είναι αντίθετες και δίνουν  $\Sigma F=0$ .

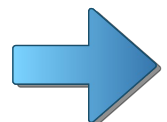
Επομένως

$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή}$$

$$k \cdot x_1 - mg \cdot \eta \mu \varphi = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{mg \cdot \eta \mu \varphi}{k} = \frac{2kg \cdot 10m/s^2 \cdot 1/2}{100N/m} \Rightarrow x_1 = 0,1m$$

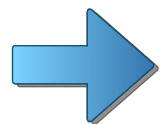
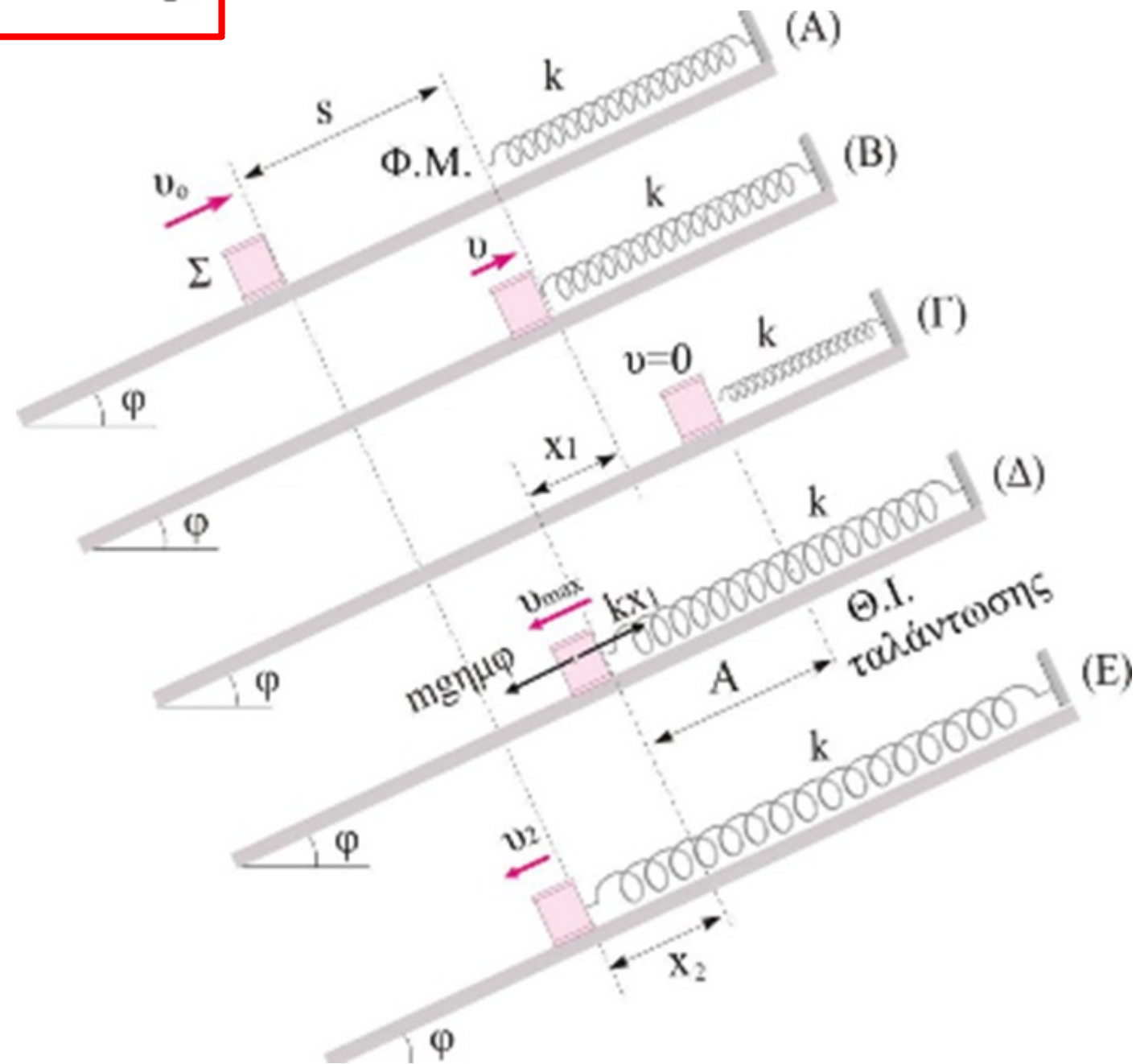
Εφαρμόζουμε την ΑΔΕΤ στις θέσεις (B) και (Δ).

$$K + U = K_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow$$



$$v_{\max} = \sqrt{v^2 + \frac{kx_1^2}{m}} = \sqrt{\left(\sqrt{1,5m/s}\right)^2 + \frac{100N/m \cdot (0,1m)^2}{2kg}} \Rightarrow$$

$$v_{\max} = \sqrt{2} \frac{m}{s}$$



**Δ3)** Η εξίσωση της απομάκρυνσης με το χρόνο είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1),$$

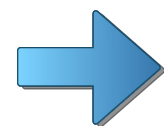
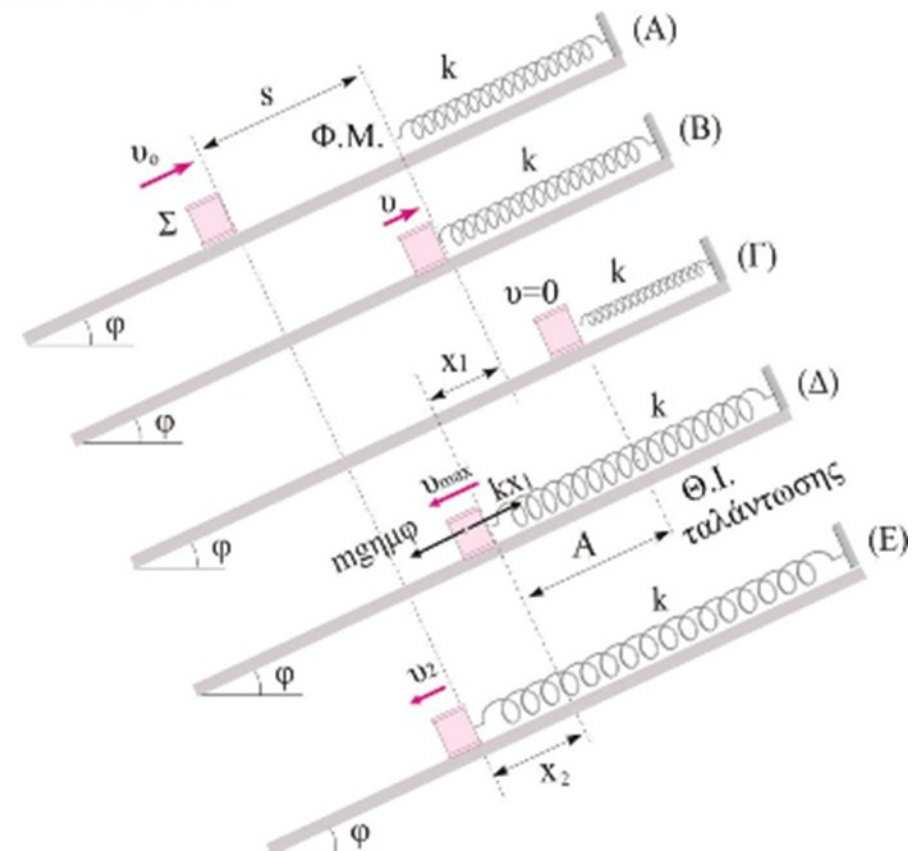
με 
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{50} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$v_{\max} = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = 0,2\text{m}$$

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το σώμα βρίσκεται στη θέση (B), δηλαδή σε απομάκρυνση  $x_1 = +0,1\text{m}$  και έχει θετική ταχύτητα, επομένως η αρχική φάση της ταλάντωσης

θα βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.



$$x_1 = A \cdot \eta\mu\varphi_o \Rightarrow 0,1 = 0,2 \cdot \eta\mu\varphi_o \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{6}$$

ή

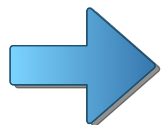
$$\varphi_o = \frac{5\pi}{6}$$

Επειδή την  $t = 0$  η ταχύτητα του σώματος είναι θετική, έχουμε  $\varphi_o = \pi/6$ .

Η (1) γίνεται:

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\sqrt{50}t + \frac{\pi}{6}\right), S.I.$$

**Δ4)** Όταν το ταλαντούμενο σώμα περνά για δεύτερη φορά από το σημείο εκτόξευσης απέχει  $s - x_1 = 0,15m$  από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης και βρίσκεται σε απομάκρυνση  $x_2 = -0,15m$ . Το σώμα κατεβαίνει και έχει αρνητική ταχύτητα μέτρου  $v_2$ . Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας στη θέση αυτή είναι



$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -k \cdot x_2 \cdot v_2 \quad (2)$$

Η ταχύτητα  $v_2$  θα υπολογιστεί από την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση.

$$K + U = K_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{k(A^2 - x_2^2)}{m}} = \sqrt{\frac{100\text{N/m}(0,2^2\text{m}^2 - 0,15^2\text{m}^2)}{2\text{kg}}} \Rightarrow v_2 = -\frac{\sqrt{14}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_2 = -(100\text{N/m}) \cdot (-0,15\text{m}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{14}}{4}\text{m/s}\right) v_2 \Rightarrow$$

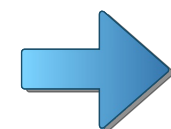
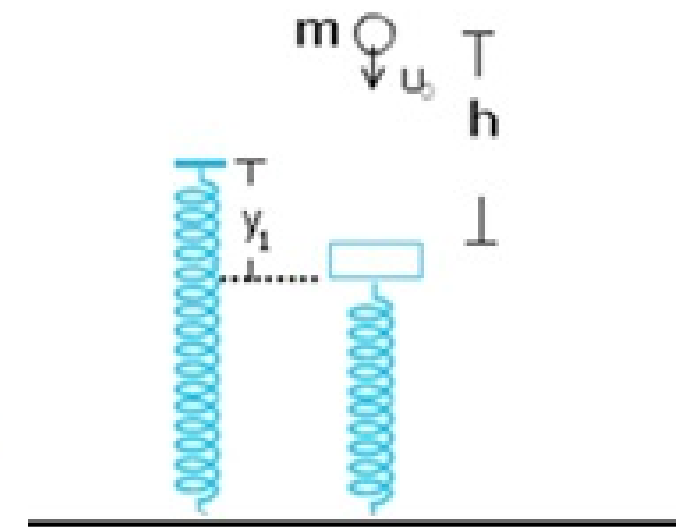
$$\boxed{\frac{dK}{dt} = -3,75\sqrt{14} \frac{\text{J}}{\text{s}}}$$

3

Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου

σταθεράς  $k = 400 \frac{N}{m}$  είναι στερεωμένος δίσκος Α  
μάζας  $M = 4Kg$ . Το κάτω άκρο του ελατηρίου  
είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο και ο δίσκος  
ισορροπεί. Από ύψος  $h = 0,25m$  πάνω από το  
δίσκο βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω, με

αρχική ταχύτητα  $v_0 = 2 \frac{m}{s}$ , μικρή σφαίρα Β, μάζας  $m = 2Kg$ . Η σφαίρα  
συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το δίσκο. Μετά την κρούση  
απομακρύνουμε τη σφαίρα ενώ ο δίσκος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η  
διάρκεια κρούσης θεωρείται αμελητέα, όπως και οι τριβές και οι αντιστάσεις  
θεωρούνται αμελητέες.

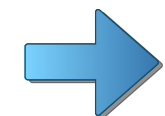


**Δ1)** Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του δίσκου και της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.

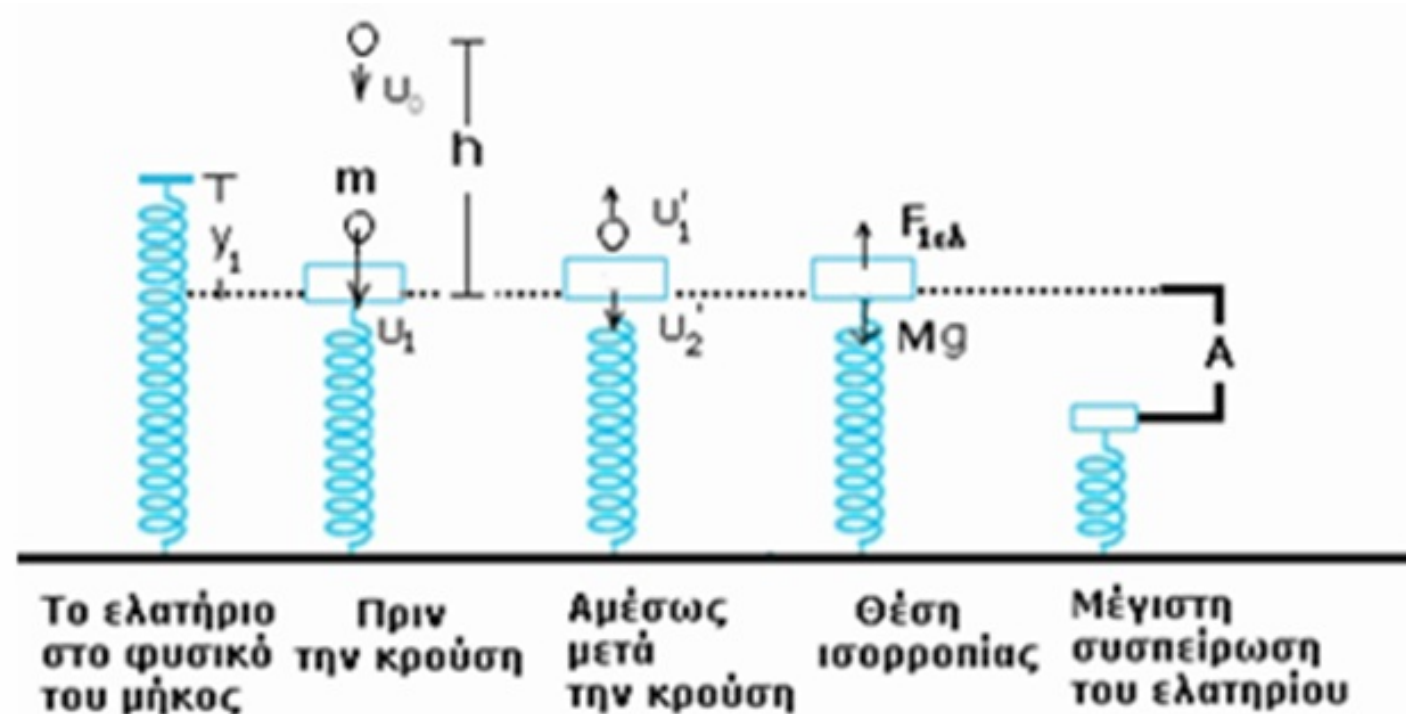
**Δ2)** Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του δίσκου, αν η σταθερά ταλάντωσης είναι  $D = k$ .

**Δ3)** Να υπολογίσετε τον χρόνο στον οποίο θα μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητα του δίσκου.

**Δ4)** Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του δίσκου όταν περνάει από τη θέση ισορροπίας του.

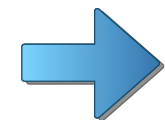


# Λύση



**Δ1)** Το σώμα  $B$  εκτελεί κατακόρυφη κίνηση προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα  $u_0$ . Η μόνη δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι το βάρος του και επειδή είναι συντηρητική δύναμη, η μηχανική του ενέργεια διατηρείται.

Συνεπώς:



$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} =$$

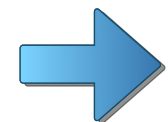
$$= \sqrt{(2\text{m/s})^2 + 2 \cdot (10\text{m/s}^2) \cdot 0,25\text{m}} \Rightarrow v_1 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η κρούση είναι κεντρική ελαστική με το σώμα Β ακίνητο, οπότε για τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση ισχύουν οι σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{m - M}{m + M} \cdot v_1 = \frac{2\text{kg} - 4\text{kg}}{2\text{kg} + 4\text{kg}} \cdot 3\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_1 = -1\text{m/s}$$

$$v'_2 = \frac{2m}{m + M} \cdot v_1 = \frac{2 \cdot 2\text{kg}}{2\text{kg} + 4\text{kg}} \cdot 3\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_2 = 2\text{m/s}$$

Συνεπώς ο δίσκος μετά την κρούση θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου  $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$  και η σφαίρα θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου  $1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

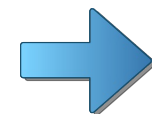


**Δ2)** Το πλάτος ταλάντωσης θα το βρούμε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση. Επειδή ο δίσκος βρίσκεται στη θέση ισορροπίας η ταχύτητα  $v'_2 = 2\text{ m/s}$  που αποκτά είναι η μέγιστη, συνεπώς η διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση γράφεται:

$$\frac{M v'^2_2}{2} = \frac{DA^2}{2} \Rightarrow A = v'_2 \sqrt{\frac{M}{D}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{4\text{kg}}{400\text{N/m}}} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

**Δ3)** Αμέσως μετά την κρούση ο δίσκος βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και μέχρι να πάει για πρώτη φορά στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης, όπου η ταχύτητά του θα είναι μηδέν, απαιτείται χρόνος:

$$t = \frac{T}{4} \quad (1)$$



Όμως η περίοδος ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{4kg}{400N/m}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} s$$

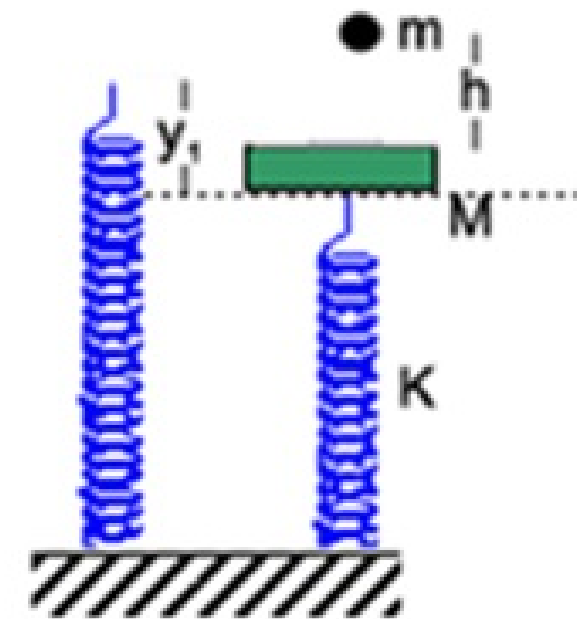
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει

$$t = \frac{\pi}{20} s$$

**Δ4)** Από τη γενικευμένη μορφή του 2<sup>ου</sup> νόμου του Νεύτωνα,  $\Sigma F = \frac{dp}{dt}$ , προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη. Επειδή στη θέση ισορροπίας ισχύει  $\Sigma F = 0$ , συνεπάγεται ότι  $\frac{dp}{dt} = 0$  και  $\frac{dp}{dt} = 0$ .

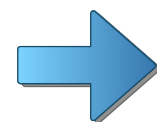
4

Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k = 400 \text{ N/m}$  είναι συνδεδεμένος δίσκος μάζας  $M = 3 \text{ kg}$  που ισορροπεί. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε δάπεδο. Από ύψος  $h = 0,8 \text{ m}$  πάνω από το δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερα μια σφαίρα μάζας  $m = 1 \text{ kg}$ , η οποία συγκρούεται πλαστικά με το δίσκο.



**Δ1)** Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

**Δ2)** Να υπολογίσετε το % ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας, που έγινε θερμότητα στη διάρκεια της κρούσης.



**Δ3)** Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδο ταλάντωσής του.

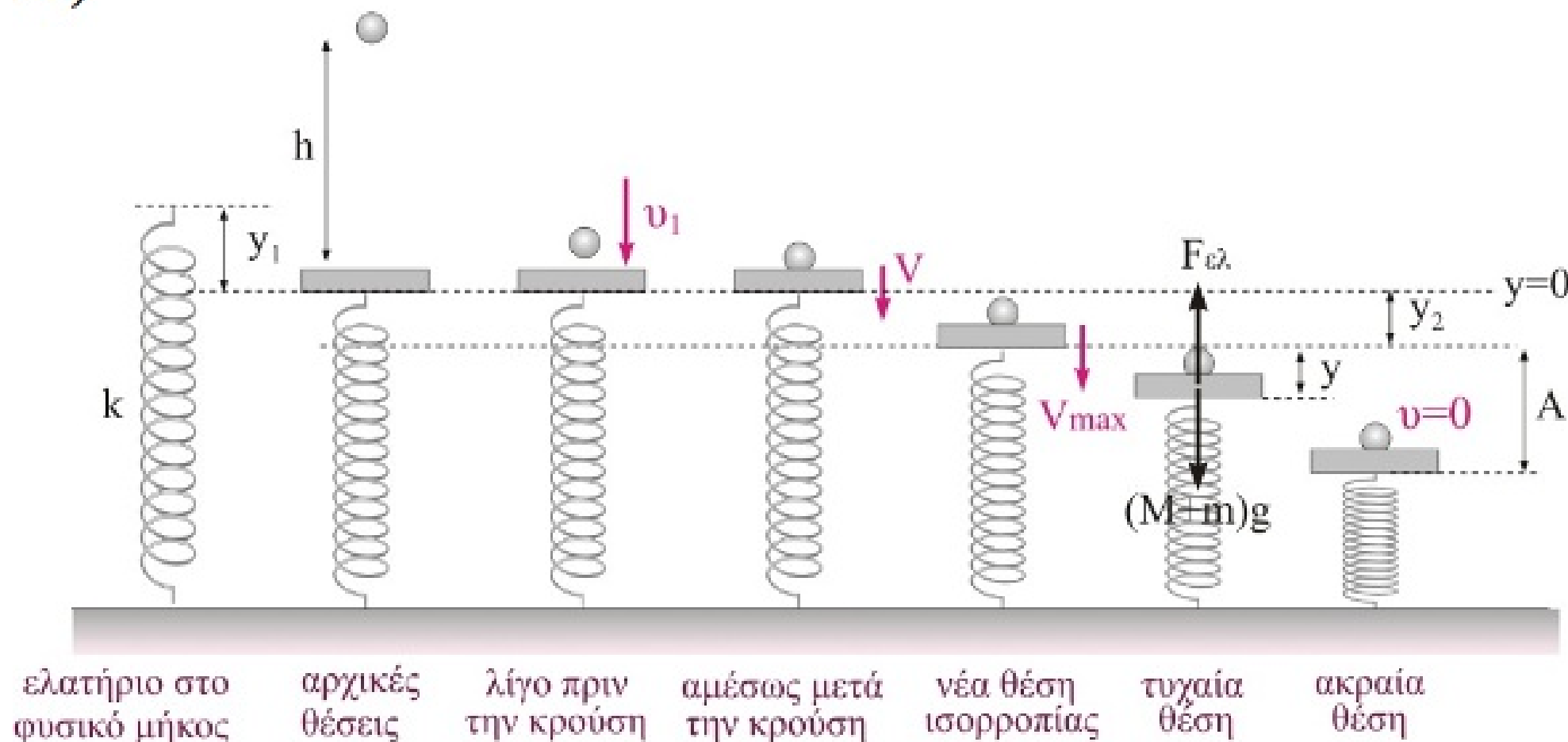
**Δ4)** Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσής του.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  και  $\sqrt{17} = 4,12$  .



# Λύση

Δ1)



Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση και η μηχανική της ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και της θέσης ελάχιστα πριν την κρούση με το δίσκο.



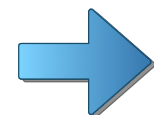
Συνεπώς:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,8m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = 4 \frac{m}{s}$$

Για την κρούση ισχύει η διατήρηση της ορμής. Γράφουμε τη διατήρηση της ορμής μεταξύ των θέσεων ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση.

$$p_{\pi\rho\iota\nu} = p_{\mu\epsilon\tau} \Rightarrow mv_1 = (M + m)V \Rightarrow V = \frac{mv_1}{M + m} = \frac{1kg \cdot 4 \frac{m}{s}}{3kg + 1kg} \Rightarrow$$

$$V = 1 \frac{m}{s}$$



**Δ2)** Η ενέργεια που χάθηκε από το σύστημα στη διάρκεια της κρούσης και μεταφέρθηκε στο περιβάλλον, υπό μορφή θερμότητας, είναι ίση με τη μείωση της κινητικής ενέργειας:

$$Q = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M + m)V^2}{2} \Rightarrow$$

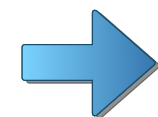
$$Q = \frac{1kg \cdot (4m/s)^2}{2} - \frac{(3kg + 1kg) \cdot (1m/s)^2}{2} \Rightarrow$$

$$Q = 8J - 2J \Rightarrow Q = 6J$$

συνεπώς το % ποσοστό θα είναι:

$$a \% = \frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}} 100 \% \Rightarrow a \% = \frac{6J}{8J} 100 \% \Rightarrow a \% = 75 \%$$

όπου  $K_{\alpha\rho\chi}$  η κινητική ενέργεια πριν την κρούση.



**Δ3)** Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα θα ξεκινήσει να ταλαντώνεται γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας που θα είναι χαμηλότερα κατά  $y_2$  από την αρχική θέση. Παίρνουμε μια τυχαία θέση, που απέχει  $y$  από τη θέση ισορροπίας, σημειώνουμε τις δυνάμεις και βρίσκουμε τη συνισταμένη δύναμη.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{w} + \vec{F}_{ελ}$$

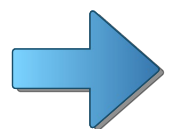
Ορίζοντας φορά θετική προς τα κάτω παίρνουμε:

$$\Sigma F = (M + m)g - k(y_1 + y_2 + y) \quad (1)$$

Γράφοντας τη συνθήκη ισορροπίας για τη νέα θέση ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{ελ} = 0 \Rightarrow$$

$$(M + m)g - k(y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow (M + m)g = k(y_1 + y_2) \quad (2)$$



Από το συνδυασμό της σχέσης (1) με τη σχέση (2) προκύπτει:

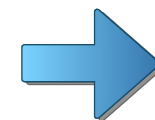
$$\Sigma F = -ky$$

Το μείον δηλώνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει τέτοια φορά ώστε να τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση προς τα πάνω.

Συνεπώς το σώμα θα κάνει Απλή Αρμονική Ταλάντωση, με σταθερά ταλάντωσης  $D = k$ .

Η περίοδος ταλάντωσης θα είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M + m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3kg + 1kg}{400N/m}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$



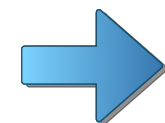
**Δ4)** Το πλάτος ταλάντωσης θα το βρούμε εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας στις ταλαντώσεις. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας που έχει αμέσως μετά την κρούση. Επισημαίνεται ότι αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται υψηλότερα κατά  $y_2$  από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απομάκρυνση  $y_2$  βρίσκεται από το συνδυασμό των σχέσεων που ισχύουν για τις δύο θέσεις ισορροπίας.

Για την αρχική θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{ελ} = 0 \Rightarrow Mg - ky_1 = 0 \Rightarrow Mg = ky_1 (3)$$

Για τη νέα θέση ισορροπίας ισχύει η σχέση (2). Από το συνδυασμό των σχέσεων (2) και (3) παίρνουμε:

$$mg = ky_2 \Rightarrow y_2 = \frac{mg}{k} = \frac{1kg \cdot 10m/s^2}{400N/m} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{40}m$$



Έτσι η διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση γράφεται:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{ky_2^2}{2} + \frac{(M+m)V^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{y_2^2 + \frac{M+m}{K}V^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{40}m\right)^2 + \frac{3kg + 1kg}{400N/m} \cdot (1m/s)^2} \Rightarrow$$

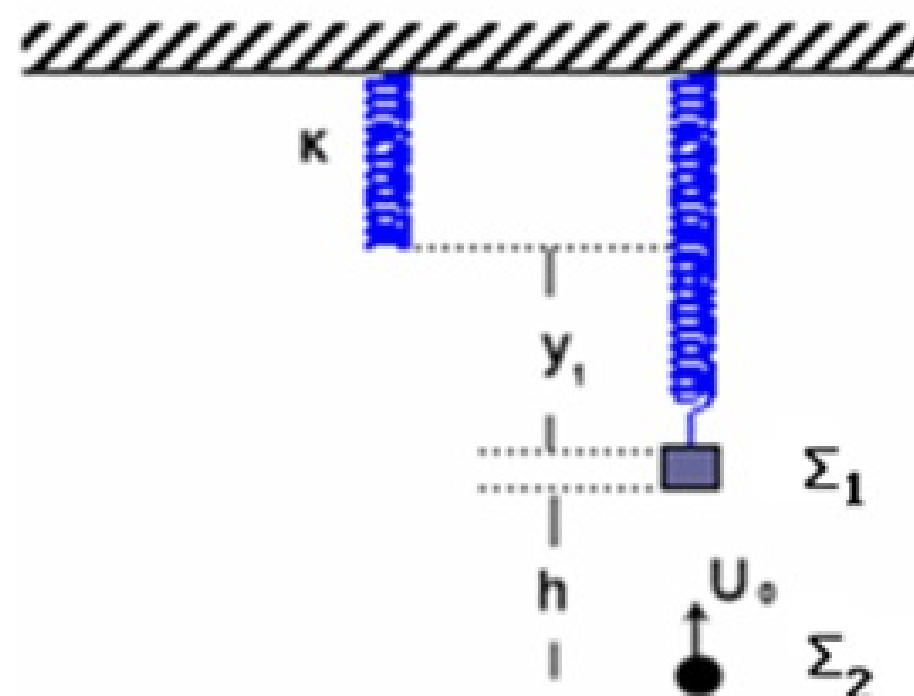
$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{17}}{40}m = 10,3cm$$

5

Σώμα  $\Sigma_1$ , μάζας  $m_1 = m = 1\text{Kg}$ ,  
ισορροπεί δεμένο στην κάτω άκρη  
κατακόρυφου ελατηρίου

σταθεράς  $k = 900 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ , του οποίου η  
άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη  
σε οροφή. Ένα δεύτερο σώμα  
 $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = m = 1\text{Kg}$ , βάλλεται  
κατακόρυφα προς τα πάνω, με

ταχύτητα  $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , από σημείο που βρίσκεται σε  
απόσταση  $h = 1,35\text{m}$  κάτω από το σώμα  $\Sigma_1$ . Τα δύο σώματα συγκρούονται  
κεντρικά ελαστικά και στη συνέχεια το σώμα  $\Sigma_1$  εκτελεί απλή αρμονική  
ταλάντωση. Να βρείτε:



**Δ1)** το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος  $\Sigma_1$ .

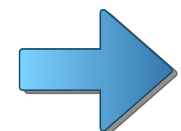
**Δ2)** τη θέση του σώματος  $\Sigma_2$  τη χρονική στιγμή, που η κινητική ενέργεια του σώματος  $\Sigma_1$  γίνεται για 1η φορά ελάχιστη.

**Δ3)** το έργο της δύναμης του ελατηρίου καθώς το σώμα  $\Sigma_1$  κινείται από τη θέση ισορροπίας του μέχρι το ψηλότερο σημείο της τροχιάς του.

**Δ4)** το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος  $\Sigma_1$ , τη στιγμή που φτάνει στο ψηλότερο σημείο.

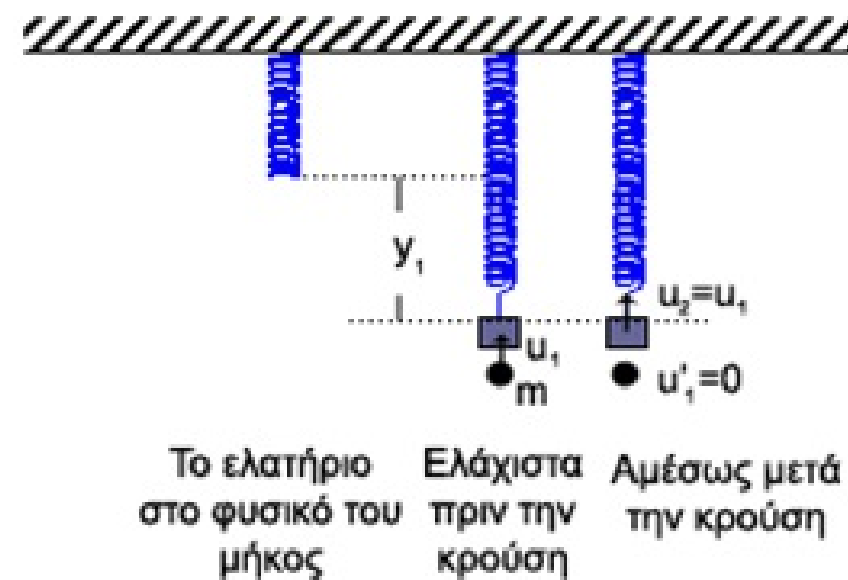
Οι αντιστάσεις λόγω των τριβών θεωρούνται αμελητέες. Δίνονται η επιτάχυνση

βαρύτητας  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  και  $\pi^2 = 10$ .



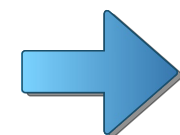
# Λύση

**Δ1)** Το σώμα  $\Sigma_2$  εκτελεί κατακόρυφη κίνηση προς τα πάνω και η μόνη δύναμη που του ασκείται είναι το βάρος του, άρα η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ του σημείου εκτόξευσης και του σημείου ελάχιστα πριν την κρούση. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω βαρυτικού πεδίου, εκείνο από το οποίο ξεκινά το σώμα  $\Sigma_2$ .



$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{(v_0^2 - 2gh)} = \sqrt{(6\text{m/s})^2 - 2 \cdot (10\text{m/s}^2) \cdot 1,35\text{m}} \Rightarrow v_1 = 3\text{m/s}$$



Στη διάρκεια της κρούσης, οι εξωτερικές δυνάμεις του συστήματος των δύο σωμάτων, είναι αμελητέες σε σχέση με τις εσωτερικές δυνάμεις και κατά συνέπεια ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Η κρούση είναι κεντρική ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, άρα ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Συνεπώς η ταχύτητα του  $\Sigma_1$  μετά την κρούση θα είναι  $v_2 = v_1 = 3\frac{m}{s}$ .

Το σώμα  $\Sigma_1$  θα ξεκινήσει ταλάντωση γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας

του, άρα η ταχύτητα  $v_2 = 3\frac{m}{s}$  που αποκτά, αποτελεί την μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης.

$$v_2 = v_{\max} = \omega A = 3\frac{m}{s} \quad (1)$$



Για την περίοδο της ταλάντωσης ισχύει:

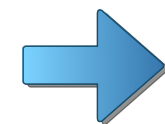
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1kg}{900N/m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{30}s \Rightarrow T = \frac{\pi}{15}s$$

και  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi/15} rad/s \Rightarrow \omega = 30 rad/s$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:  $A = 0,1m$

**Δ2)** Το σώμα  $\Sigma_2$  μετά την κρούση θα αποκτήσει μηδενική ταχύτητα και θα ξεκινήσει ελεύθερη πτώση. Έτσι, η θέση του σε σχέση με το σημείο

σύγκρουσης κάθε στιγμή θα βρίσκεται από τη σχέση  $y = \frac{1}{2}gt^2$  (2), θεωρώντας τη θετική φορά προς τα κάτω.



Το σώμα  $\Sigma_1$  ελαχιστοποιεί την κινητική του ενέργεια για 1η φορά όταν βρεθεί στην πάνω ακραία θέση. Επειδή ξεκινά από τη θέση ισορροπίας, μέχρι να πάει στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης απαιτείται χρονικό

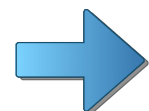
διάστημα  $t = \frac{T}{4} = \frac{\frac{\pi}{15}}{4} s \Rightarrow t = \frac{\pi}{60} s$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot \left( \frac{\pi}{60} s \right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{72} m$$

**Δ3)** Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ των εξής δύο θέσεων: της θέσης ισορροπίας και του υψηλότερου σημείου της τροχιάς του σώματος

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{\epsilon\lambda}} + W_w \Rightarrow 0 - \frac{mv_2^2}{2} = W_{F_{\epsilon\lambda}} - mgA \Rightarrow$$



$$\Rightarrow W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -\frac{mv_2^2}{2} + mgA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -\frac{mv_2^2}{2} + mgA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -\frac{1kg \cdot (3m/s)^2}{2} + 1kg \cdot (10m/s^2) \cdot 0,1m \Rightarrow W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -3,5J$$

**Δ4)** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος στη θέση αυτή. Επειδή το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση αυτή θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

$$\alpha = \alpha_{\max} = \omega^2 A = (30rad/s)^2 \cdot 0,1m \Rightarrow \alpha = \alpha_{\max} = 90 \frac{m}{s^2}$$



6

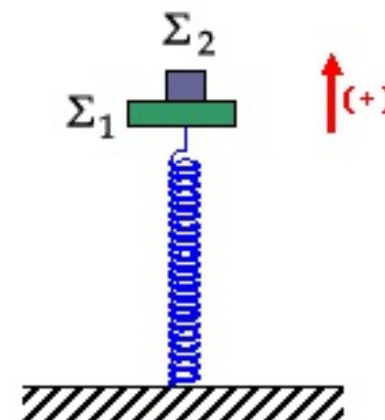
Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς  $k$  έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο. Στο άνω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα

$\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 2kg$  που ισορροπεί. Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  αφήνεται πάνω στο σώμα  $\Sigma_1$ , χωρίς ταχύτητα, ένα άλλο σώμα

$\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 1kg$ . Το σύστημα ελατήριο –  $\Sigma_1 - \Sigma_2$  ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

πλάτους  $A = \frac{1}{30}m$ .

Θεωρώντας θετική την κατακόρυφη προς τα πάνω φορά, να βρείτε:



Δ1) Τη σταθερά  $k$  του ελατηρίου.

Δ2) Τη μέγιστη συσπίρωση  $\Delta L_{\max}$  του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος.

Δ3) Την εξίσωση  $U = f(t)$  της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος.

Δ4) Τη δύναμη επαφής  $N$  που ασκείται από το  $\Sigma_2$  στο  $\Sigma_1$  στη θέση μέγιστης συσπίρωσης του ελατηρίου.

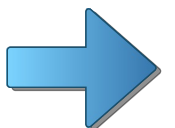
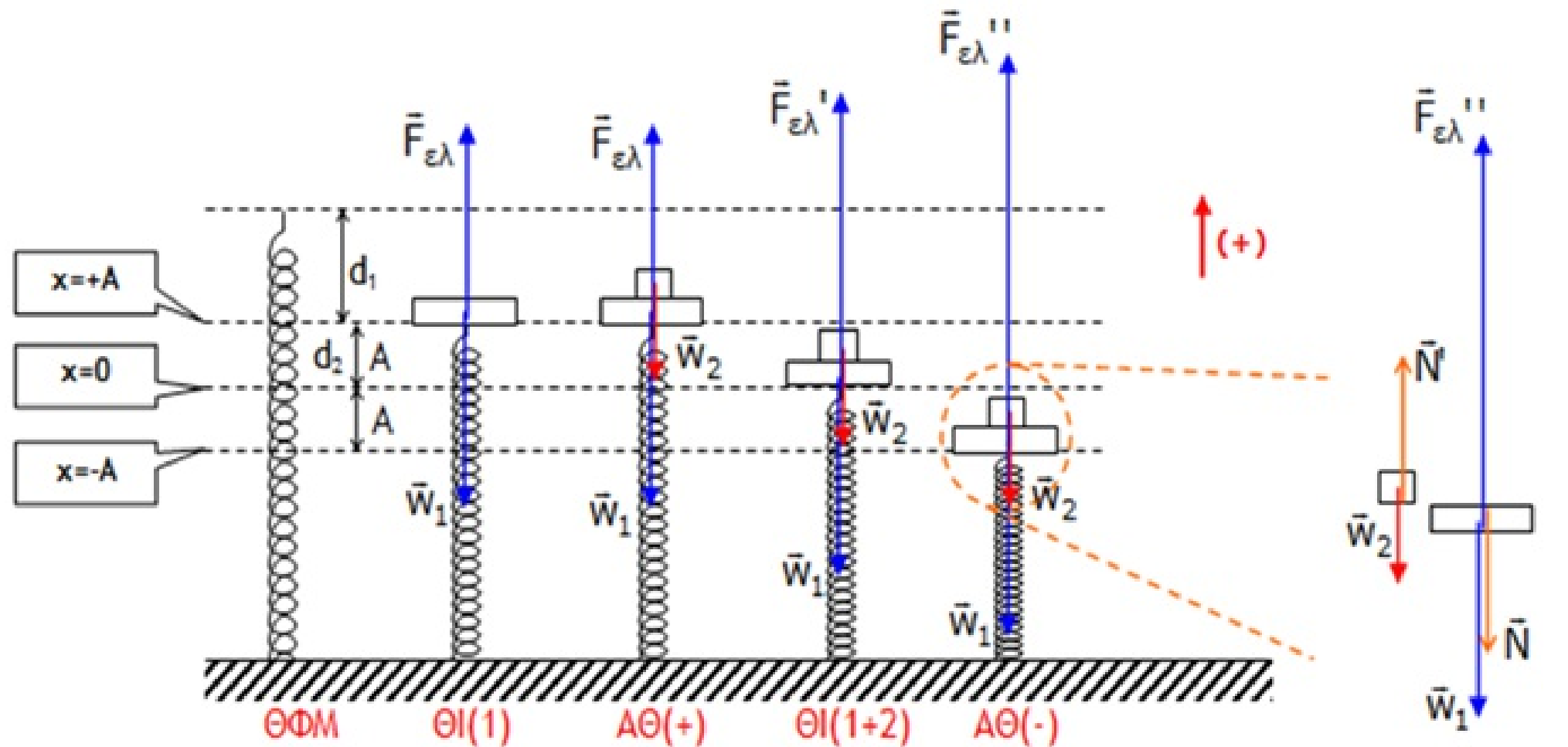
Δίνεται:  $g = 10m/s^2$ .



## Λύση

Σχεδιάζουμε το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους ( $\Theta\Phi\text{M}$ ) και το σύστημα **ελατήριο** –  $\Sigma_1$  στη θέση ισορροπίας του ( $\Theta\text{I}(1)$ ).

Σχεδιάζουμε το σύστημα **ελατήριο** –  $\Sigma_1$  –  $\Sigma_2$  στην αρχική του θέση, η οποία είναι και ακραία θετική θέση ταλάντωσης ( $A\Theta(+)$ ), στη θέση ισορροπίας του ( $\Theta\text{I}(1+2)$ ) και στην ακραία αρνητική θέση ταλάντωσης ( $A\Theta(-)$ ), η οποία είναι και θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου:



Δ1) Βρίσκουμε την απόσταση  $d_1$  μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους (ΘΦΜ) και της θέσης ισορροπίας του σώματος  $\Sigma_1$  (ΘΙ(1)), από τη συνθήκη ισορροπίας:

Στη ΘΙ(1):  $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow kd_1 = m_1g \Rightarrow d_1 = \frac{m_1g}{k} \quad (1)$

Βρίσκουμε την απόσταση  $d_2$  μεταξύ της θέσης ισορροπίας του σώματος  $\Sigma_1$  και της θέσης ισορροπίας του συστήματος  $\Sigma_1 + \Sigma_2$  (ΘΙ(1+2)), από τη συνθήκη ισορροπίας:

Στη ΘΙ(1+2):

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = 0 \Rightarrow k(d_1 + d_2) = (m_1 + m_2)g \Rightarrow kd_1 + kd_2 = m_1g + m_2g$$

και επειδή  $kd_1 = m_1g$  :

$$kd_2 = m_2g \Rightarrow d_2 = \frac{m_2g}{k}$$



Επειδή το σύστημα ελατήριο –  $\Sigma_1$  –  $\Sigma_2$  ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από τη ΘΙ(1) χωρίς ταχύτητα, αυτή η θέση θα είναι ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως, το πλάτος  $A$  της ταλάντωσης ισούται με την απόσταση  $\Theta\text{I}(1) - \Theta\text{I}(1+2)$ , δηλαδή με την απόσταση  $d_2$ :

$$d_2 = A \Rightarrow A = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow k = \frac{m_2 g}{A} \Rightarrow k = 300 \frac{N}{m}$$

**$\Delta 2$ )** Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε την απόσταση  $d_1$ :

$$d_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow d_1 = \frac{2}{30} m$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα, η μέγιστη συσπείρωση  $\Delta L_{\max}$  του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος είναι:

$$\Delta L_{\max} = d_1 + 2A \Rightarrow \Delta L_{\max} = \frac{4}{30} m$$



Δ3) Η δυναμική ενέργεια μιας Α.Α.Τ. σε σχέση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση  $U = E\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0)$

Όμως  $E = \frac{1}{2}DA^2$

Επειδή  $D = k = 300\frac{N}{m}$ , με αντικατάσταση στον τύπο  $E = \frac{1}{2}DA^2$ , υπολογίζουμε την ενέργεια της ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 300\frac{N}{m} \cdot \left(\frac{1}{30}m\right)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{6}J$$

Από τη σχέση  $D = (m_1 + m_2)\omega^2$  υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow 300 = 3\omega^2 \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$



Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  η ταλάντωση ξεκινά από τη θέση  $x = +A$ .  
Βρίσκουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης ως εξής:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{rad}$$

Με αντικατάσταση στον τύπο  $U = E\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0)$  έχουμε:

$$U = E\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow U = \frac{1}{6}\eta\mu^2(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow U = \frac{1}{6} \cdot \sigma\nu^2 10t (SI)$$

**Δ4)** Για να υπολογίσουμε τη δύναμη επαφής  $N$  που ασκείται από το  $\Sigma_2$  στο  $\Sigma_1$  αρκεί να υπολογίσουμε τη δύναμη επαφής  $N$  που ασκείται από το  $\Sigma_1$  στο  $\Sigma_2$ . Στη θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου, σχεδιάζουμε τις ασκούμενες δυνάμεις στο  $\Sigma_2$ .

Για την απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος  $\Sigma_2$ , σε κάθε θέση ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \quad (2)$$



Το σώμα  $\Sigma_2$  ταλαντώνεται με την ίδια γωνιακή συχνότητα  $\omega$  που ταλαντώνεται το σύστημα ελατήριο –  $\Sigma_1$  –  $\Sigma_2$ , άρα για τη σταθερά  $D_2$  ισχύει:  $D_2 = m_2\omega^2$

Έτσι η σχέση (2) γίνεται:

$$N' - m_2g = -m_2\omega^2 x \Rightarrow N' = m_2g - m_2\omega^2 x$$

Με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$N' = 1kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} - 1kg \left( 10 \frac{rad}{s} \right)^2 \cdot \left( -\frac{1}{30} m \right) \Rightarrow$$

$$N' = 10 + \frac{10}{3} \Rightarrow N' = \frac{40}{3} N$$

Επειδή οι δυνάμεις  $\vec{N}'$  και  $\vec{N}$  είναι αντίθετες, για τις αλγεβρικές τιμές τους έχουμε:

$$N = -N' \Rightarrow N = -\frac{40}{3} N$$

Δηλαδή, η δύναμη  $\vec{N}$  έχει μέτρο  $\frac{40}{3} N$  και κατεύθυνση προς τα κάτω.

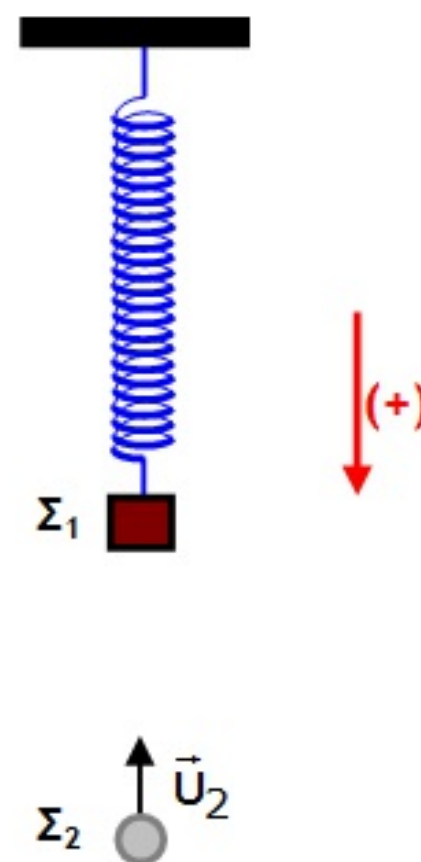


7

Ένα κατακόρυφο ελατήριο

σταθεράς  $k = 100 \text{ N/m}$  έχει το άνω άκρο του στερεωμένο σε οροφή. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 3 \text{ kg}$  που ισορροπεί στη θέση  $\Theta\text{I}(1)$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ , ένα βλήμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 1 \text{ kg}$  που κινείται στον άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου  $v_2$  και φορά προς τα πάνω, προσκρούει στο σώμα  $\Sigma_1$  και σφηνώνεται σ' αυτό. Το συσσωμάτωμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική

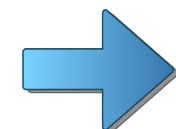
ταχύτητα μέτρου  $v_\sigma = \frac{\sqrt{3} m}{2 s}$ .



Θεωρώντας θετική την κατακόρυφη προς τα κάτω φορά, να βρείτε:

**Δ1)** την επιμήκυνση  $d_1$  του ελατηρίου ως προς το φυσικό του μήκος, στη θέση ισορροπίας  $\Theta\text{I}(1)$  του σώματος  $\Sigma_1$ .

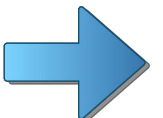
**Δ2)** το μέτρο της ταχύτητας  $v_2$  του βλήματος.



Δ3) το πλάτος  $A$  της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

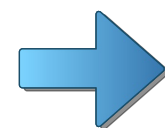
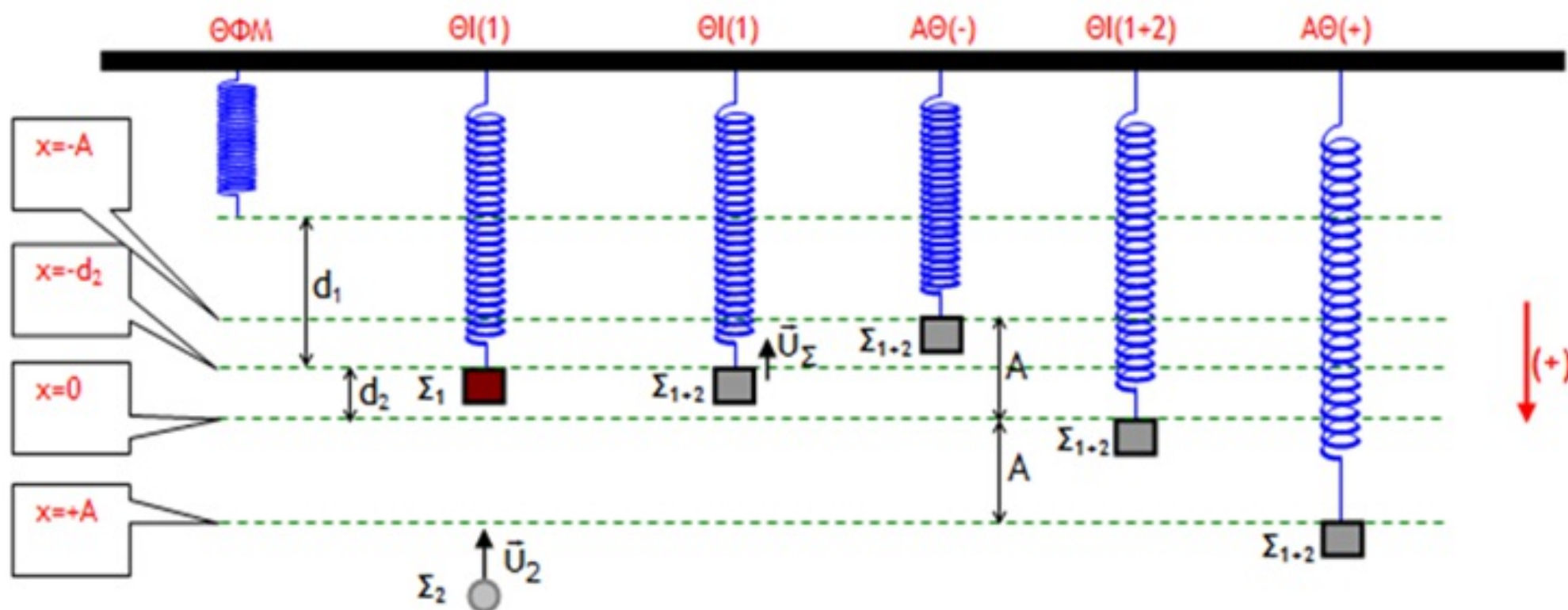
Δ4) την εξίσωση  $v = f(t)$  της ταχύτητας με την οποία ταλαντώνεται το συσσωμάτωμα.

Δίνεται:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



# Λύση

Σχεδιάζουμε το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους ( $\Theta\Phi\text{M}$ ), το σύστημα  $\text{ελατήριο} - \Sigma_1$  στη θέση ισορροπίας του ( $\Theta\text{I}(1)$ ) και στην ίδια θέση το σύστημα  $\text{ελατήριο} - \Sigma_1 - \Sigma_2$  αμέσως μετά την κρούση, η οποία είναι και αρχική θέση της ταλάντωσης. Επίσης σχεδιάζουμε το σύστημα  $\text{ελατήριο} - \Sigma_1 - \Sigma_2$  στην ακραία αρνητική θέση ταλάντωσης ( $A\Theta(-)$ ), στη θέση ισορροπίας ( $\Theta\text{I}(1+2)$ ) και στην ακραία θετική θέση ταλάντωσης ( $A\Theta(+)$ ):



Δ1) Βρίσκουμε την απόσταση  $d_1$  μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους (ΘΦΜ) και της θέσης ισορροπίας του σώματος  $\Sigma_1$  (ΘΙ(1)) από τη συνθήκη ισορροπίας στη ΘΙ(1):

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow kd_1 = m_1g \Rightarrow d_1 = \frac{m_1g}{k} \Rightarrow$$

Δ2) Το σύστημα είναι μονωμένο κατά τον ελάχιστο χρόνο που διαρκεί η κρούση, επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται:

$$\vec{p}_{ολ}(\pi\rho\iota\nu) = \vec{p}_{ολ}(\mu\epsilon\tau\alpha')$$

Θεωρώντας θετική την κατακόρυφη προς τα κάτω φορά και με χρήση αλγεβρικών τιμών έχουμε:

$$p_{ολ}(\pi\rho\iota\nu) = p_{ολ}(\mu\epsilon\tau\alpha') \Rightarrow p_1 + p_2 = p_{\Sigma} \Rightarrow 0 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_{\Sigma} \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}v_{\Sigma} \Rightarrow v_2 = \frac{3 + 1}{1} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{m}{s} \Rightarrow v_2 = -2\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει τη φορά κίνησης του βλήματος. Η ταχύτητα του

βλήματος έχει μέτρο  $v_2 = 2\sqrt{3}\frac{m}{s}$



Δ3) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ξεκινά αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική κατά  $d_2$ . Το πλάτος της ταλάντωσης θα βρεθεί εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση.

Από τη συνθήκη ισορροπίας του συστήματος  $\Sigma_1 + \Sigma_2$  βρίσκουμε τη μετατόπιση  $d_2$  της θέσης ισορροπίας.

Για τη ΘΙ(1+2)

ισχύει:  $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ}' + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = 0 \Rightarrow k(d_1 + d_2) = (m_1 + m_2)g \Rightarrow$

$$kd_1 + kd_2 = m_1g + m_2g$$

και επειδή  $kd_1 = m_1g$  παίρνουμε:

$$kd_2 = m_2g \Rightarrow d_2 = \frac{m_2g}{k} \Rightarrow d_2 = 0,1m$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ της αρχικής θέσης και της ακραίας και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $D = k = 100 \frac{N}{m}$ , έχουμε:



$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\sigma}^2 + \frac{1}{2}k(-d_2)^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = \frac{(m_1 + m_2)v_{\sigma}^2}{k} + d_2^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = \left( \frac{4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{100} + 0,1^2 \right) m^2 \Rightarrow A = 0,2m$$

**Δ4)** Η εξίσωση της ταχύτητας στη γενική της μορφή δίνεται από τη σχέση  
 $v = v_{\max} \sigma \nu \nu (\omega t + \varphi_0)$

Από τη σχέση  $D = (m_1 + m_2)\omega^2$  για  $D = k = 100 \frac{N}{m}$  βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος:



$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow 100 = 4\omega^2 \Rightarrow \omega = 5\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από τη σχέση  $v_{\max} = \omega A$  υπολογίζουμε τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης εργαζόμαστε ως εξής:

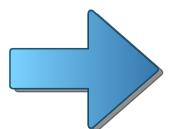
Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  ισχύει  $x_0 = -d_2$  και  $v_0 = v_{\Sigma} < 0$ .

Με αντικατάσταση στις

εξισώσεις  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$  και  $v = v_{\max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$  έχουμε:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow -d_2 = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$v = v_{\max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v_{\max}\sigma\upsilon\nu\varphi_0 < 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 < 0 \quad (2)$$

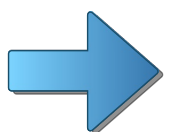


Η επίλυση του συστήματος των (1) και (2) δίνει  $\varphi_0 = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ .

Επειδή  $0 < \varphi_0 < 2\pi$ , θέτοντας  $k = 0$  έχουμε  $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$ .

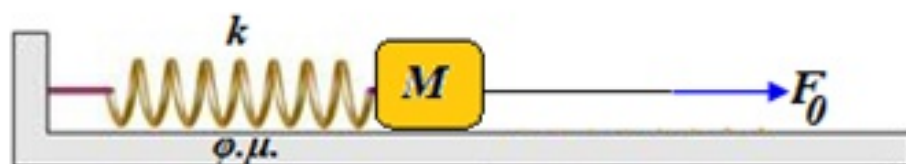
Με αντικατάσταση των τιμών  $v_{\max} = 1 \frac{m}{s}$ ,  $\omega = 5 \frac{\text{rad}}{s}$ ,  $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$  στη σχέση  $v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$  έχουμε:

$$v = \sin\left(5t + \frac{7\pi}{6}\right) (SI)$$



8

Ένας κύβος μάζας  $M = 10\text{kg}$  ισορροπεί τοποθετημένος πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στη μια κατακόρυφη έδρα του κύβου είναι δεμένη η μια άκρη ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς  $k = 250\text{N/m}$ , του οποίου η άλλη άκρη είναι δεμένη σε ακλόνητο σημείο κατακόρυφου τοίχου. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Στην απέναντι κατακόρυφη έδρα του κύβου είναι δεμένο μη ελαστικό και αβαρές νήμα το οποίο έχει όριο θραύσεως  $F_{\theta} = 120\text{N}$ .



Μέσω του νήματος ασκούμε στο σώμα δύναμη κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και με φορά τέτοια ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται. Το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την επιμήκυνση  $x$  του ελατηρίου σύμφωνα με την εξίσωση  $F = 80 + 200x$  (SI).

**Δ1)** Να βρείτε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη στιγμή που κόβεται το νήμα.



Δ2) Να βρείτε την ταχύτητα του κύβου τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

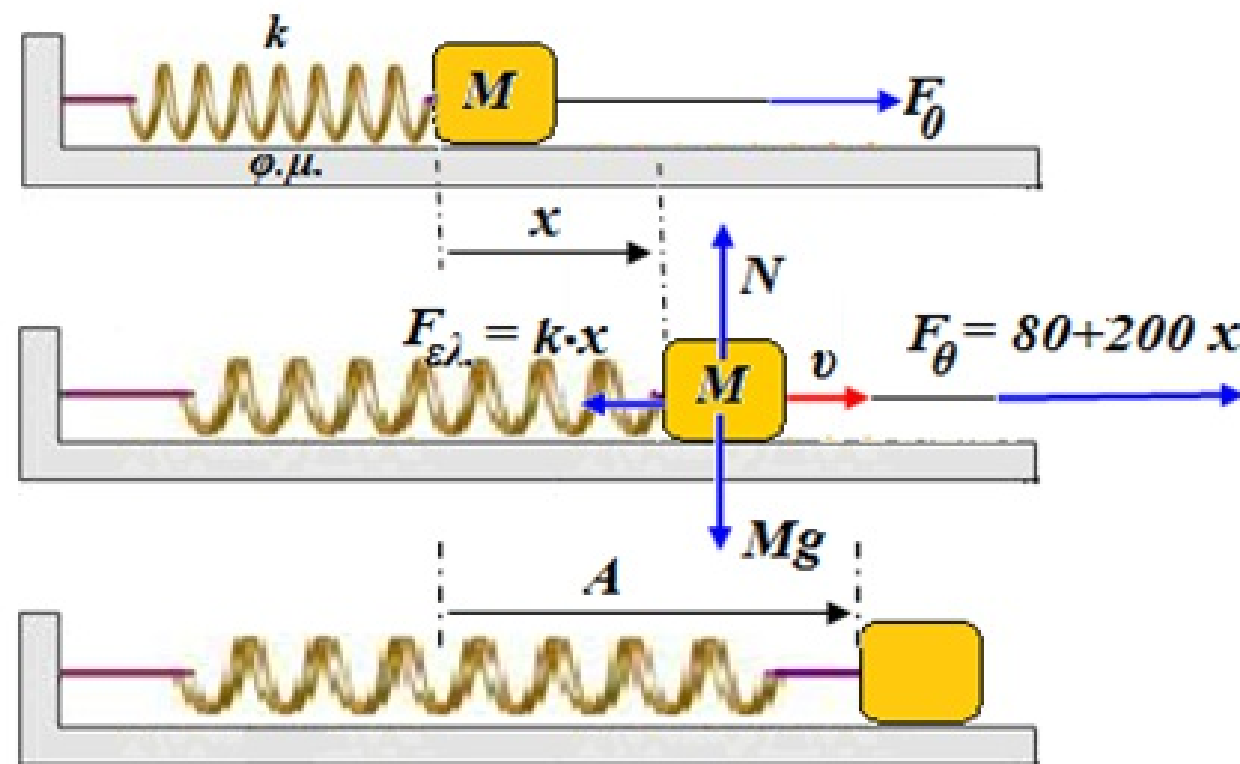
Δ3) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης  $y = f(t)$ . Να θεωρήσετε  $t_0 = 0$  τη στιγμή που κόβεται το νήμα και άξονα  $x'x$  με αρχή τη θέση ισορροπίας του κύβου και θετική φορά εκείνη κατά την οποία το ελατήριο επιμηκώνεται.

Δ4) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή  $t_0 = 0$  που κόβεται το νήμα, θα περάσει ο κύβος από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά.



# Λύση

Δ1) Τη στιγμή που κόβεται το νήμα, το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά  $x$  και η δύναμη έχει πάρει την τιμή που καθορίζει το όριο θραύσης του νήματος.



$$F_{\theta} = 80 + 200x \Rightarrow x = \frac{120\text{N} - 80\text{N}}{200\text{N/m}} \Rightarrow$$

$$x = 0,2\text{m}$$

Την ίδια στιγμή η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \left( 250 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) \cdot (0,2\text{m})^2 \Rightarrow U_{ελ} = 5\text{J}$$



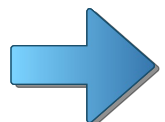
Δ2) Παρατηρούμε ότι από  $x = 0$  μέχρι  $x = 0,2m$ , η δύναμη που ασκούμε στο σώμα, μέσω του νήματος, είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη που του ασκεί το ελατήριο ( $80 + 200x > 250x$ ).

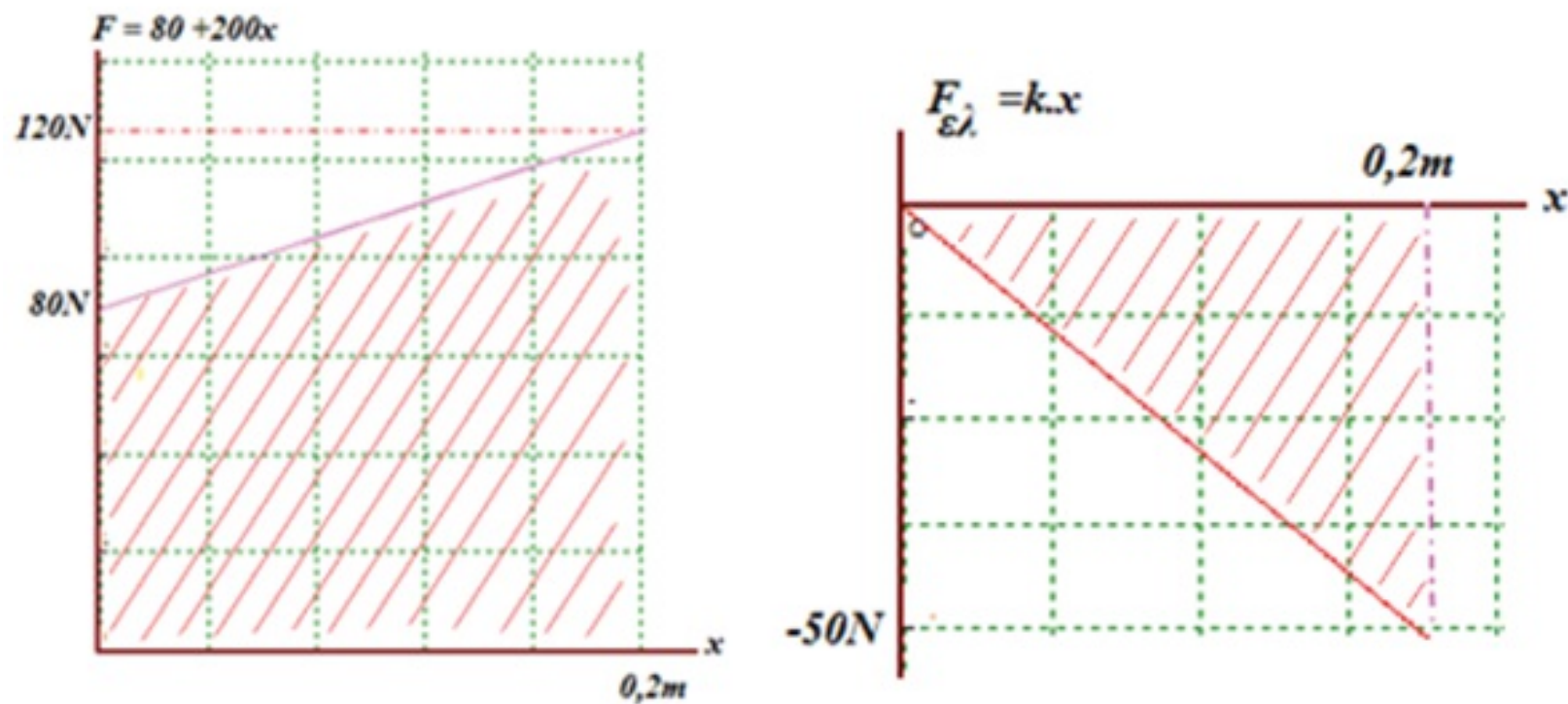
Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια που προσφέραμε εμείς στο σώμα, μέσω του έργου της  $F = 80 + 200x$ , είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια που του αφαιρείται, μέσω του έργου της  $F_{ελ} = k \cdot x$ . Έτσι στη θέση όπου θραύεται το νήμα ( $x = 0,2m$ ) το σώμα έχει κινητική ενέργεια.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από  $x = 0$  μέχρι  $x = 0,2m$

$$\frac{1}{2}Mv^2 - 0 = W_F + W_{F_{ελ}} \quad (1)$$

Οι δύο δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο είναι μεταβλητές, έτσι τα έργα τους μπορούν να υπολογιστούν από τα εμβαδά των περιοχών που περιλαμβάνονται ανάμεσα από τις γραφικές παραστάσεις και τον άξονα των  $x$ .





$$W_F = \frac{80 + 120}{2} \cdot 0,2J \Rightarrow W_F = 20J$$

$$W_{F_{el}} = \frac{-50}{2} \cdot 0,2J \Rightarrow W_{F_{el}} = -5J$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}10kg \cdot v^2 - 0 = 20J - 5J \Rightarrow v = \sqrt{3}m/s$$



Δ3) Μετά τη θραύση του νήματος το σύστημα ελατήριο μάζα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους  $A$ . Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας είναι αντίστοιχα:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

$$v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε το πλάτος ταλάντωσης, τη γωνιακή συχνότητα καθώς και την αρχική φάση.

- Για να βρούμε το πλάτος ταλάντωσης εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ των θέσεων, ακριβώς μετά τη θραύση του νήματος και στην ακρότατη θέση:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}M \cdot v^2 = \frac{1}{2}k \cdot A^2 + 0 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{kx^2 + Mv^2}{k}}$$

Και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$A = 0,4m$$



- $$k = M \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{250}{10}} \text{ rad/s} = 5 \text{ rad/s}$$

- $$\text{Για } t = 0, \quad x = 0,2\text{m}, \quad v > 0$$

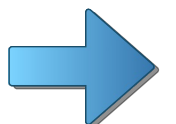
$$0,2 = 0,4\eta\mu\phi_0 \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \phi_0 = \frac{5\pi}{6}.$$

Δεκτή γίνεται η τιμή  $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$  (1ο τεταρτημόριο και  $v > 0$ )

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) βρίσκουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης

$$x = 0,4\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{S.I.})$$

**Δ4)** Όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του, για πρώτη φορά μετά τη θραύση του νήματος, αυτό θα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση και θα ισχύει:



$$x = 0 \text{ και } v < 0$$

$$0 = A \cdot \eta \mu(\omega t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \eta \mu(\omega t + \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow$$

$$\omega t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi \quad \text{ή} \quad \omega t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi$$

Δεκτή γίνεται η λύση  $\omega t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi$ , διότι  $v < 0$ .

Οπότε, η 1<sup>η</sup> διέλευση από το  $x = 0$  γίνεται για

$$k = 0 \Rightarrow t = \frac{5\pi}{6\omega} = \frac{5\pi}{6 \frac{2\pi}{T}} \Rightarrow t = \frac{5T}{12} \quad (3)$$

Όμως,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$

και με αντικατάσταση στην σχέση (3) παίρνουμε:  $t = \frac{5T}{12} = \frac{10\pi}{60} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \text{ s}$





Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή  $t_1$  που το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση  $x_1 = -20\text{cm}$ , οι χρονικοί ρυθμοί μεταβολής της ταχύτητάς του, της ορμής του και της κινητικής του ενέργειας είναι  $5\text{m/s}^2$ ,  $10\text{kgm/s}^2$  και  $10\sqrt{3}\text{ J/s}$  αντίστοιχα. Να βρείτε:

Δ1) τη μάζα του σώματος.

Δ2) το μέτρο της ταχύτητας  $v_1$  τη χρονική στιγμή  $t_1$ .

Δ3) την ενέργεια της ταλάντωσης.

Δ4) τους μέγιστους ρυθμούς μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Δίνεται:  $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu2\alpha$ .



## Λύση

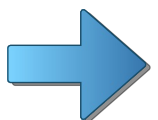
Δ1) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος ισούται με την επιτάχυνσή του και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Η μάζα του σώματος υπολογίζεται από το 2<sup>ο</sup> νόμο του Newton.

$$m = \frac{\Sigma F}{\alpha} = \frac{10}{5} kg \Rightarrow m = 2 kg$$

Δ2) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη στιγμή  $t_1$  είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 \quad \text{άρα}$$
$$10\sqrt{3} J/s = 10 N \cdot v_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{3} \frac{m}{s}$$

Δ3) Γνωρίζουμε ότι στη θέση  $x_1$  το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου  $v_1$ . Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:



$$E_T = K_1 + U_1 \Rightarrow E_T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 \quad (1)$$

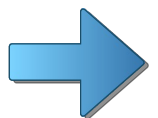
Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι

$$D = m\omega^2$$

$$a_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow 5m/s^2 = -\omega^2(-0,2m) \Rightarrow \omega = 5\frac{rad}{s}$$

$$\text{Οπότε } D = 2kg \cdot (5r/s)^2 \Rightarrow D = 50N/m$$

Αντικαθιστώντας στην **(1)** παίρνουμε  $E_T = 4J$



**Δ4)** Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος ισούται με τη μέγιστη τιμή της δύναμης που ασκείται στο σώμα και είναι ίσος με

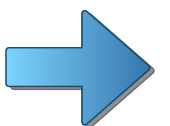
$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = \Sigma F_{\max} = DA, \quad (2)$$

όπου  $A$  το πλάτος της ταλάντωσης που δίνεται από τη σχέση

$$E_T = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_T}{D}} = 0,4m$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) παίρνουμε:  $\left. \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = 20N$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος ισούται με

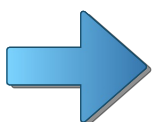


$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -Dx \cdot v = -m\omega^2 A \cdot \eta \mu(\omega t + \varphi_o) \cdot \omega A \sigma \nu \nu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{m\omega^3 A^2}{2} \eta \mu^2(\omega t + \varphi_o)$$

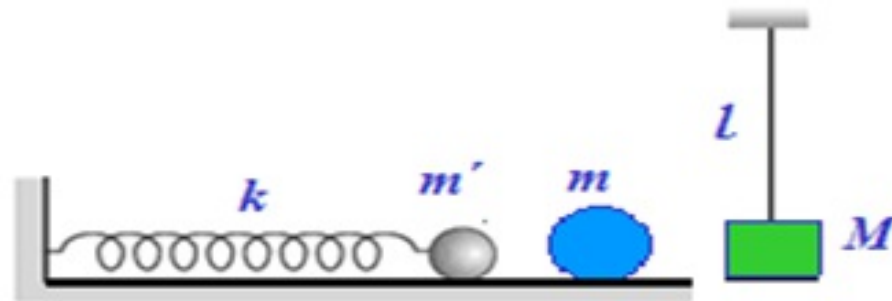
Ο ρυθμός είναι μέγιστος όταν  $\eta \mu^2(\omega t + \varphi_o) = -1$  άρα

$$\left. \frac{dK}{dt} \right|_{\max} = \frac{m\omega^3 A^2}{2} = 20 \frac{J}{s}$$



10

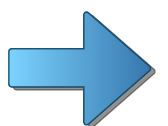
Ένα σώμα μάζας  $m = 3\text{kg}$ , είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Λόγω εσωτερικής αιτίας το σώμα διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες  $m_1, m_2$  αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει  $m_1 = 2m_2$ .



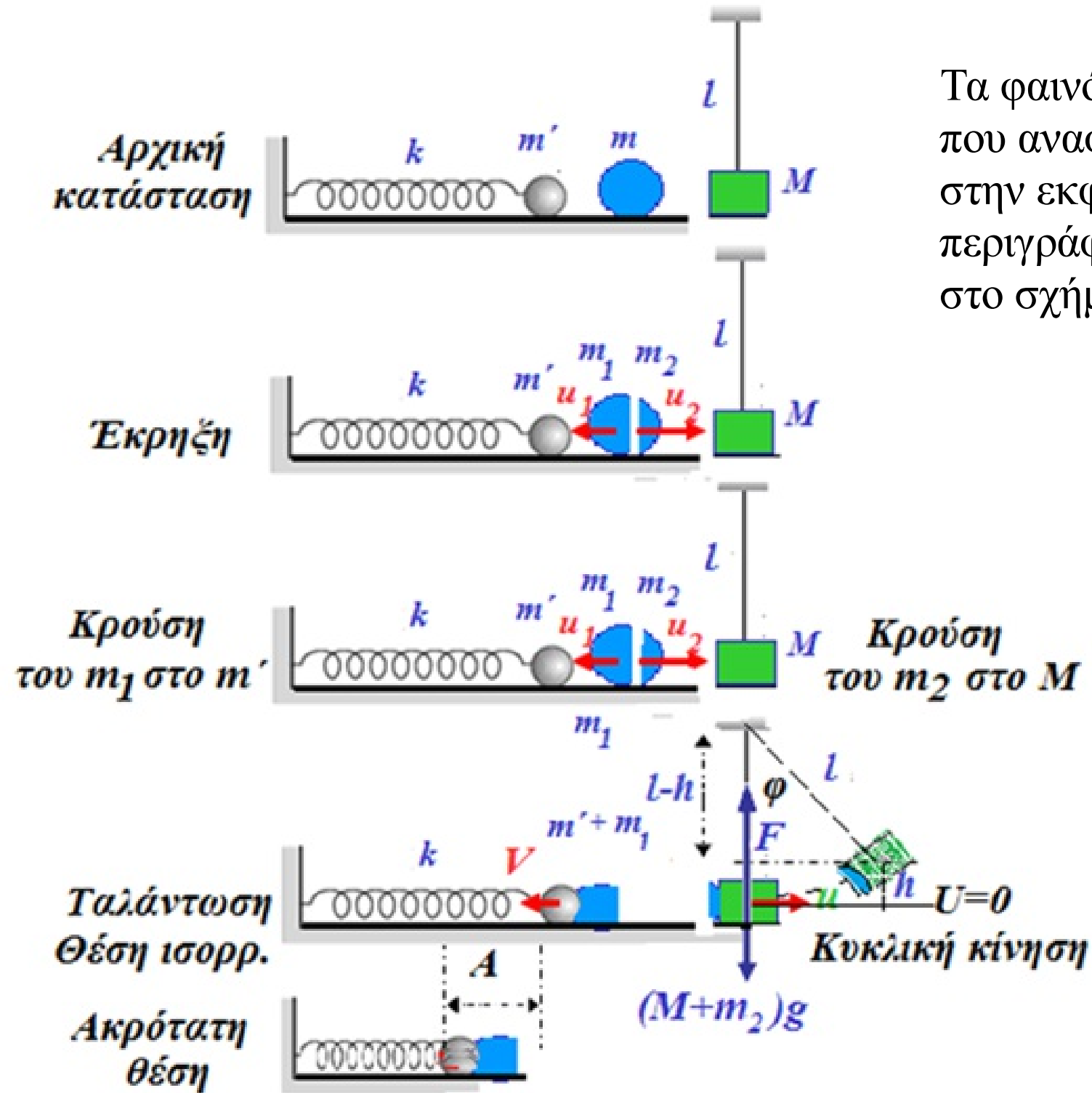
Μετά τη διάσπαση το κομμάτι μάζας  $m_1$  συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας  $m' = 2\text{kg}$ , το οποίο είναι στερεωμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k$ , του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το δημιουργούμενο συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η ταχύτητα του μηδενίζεται κάθε  $\frac{\pi}{10}\text{s}$ .

Το κομμάτι μάζας  $m_2$  συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας  $M = 3\text{kg}$ , το οποίο κρέμεται από νήμα μήκους  $\ell = 2\text{m}$ . Αμέσως μετά την κρούση η δύναμη που ασκεί το νήμα στο συσσωμάτωμα των μαζών  $m_2$  και  $M$  είναι  $F = 90\text{ N}$ .

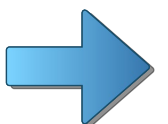
Να βρεθούν:



# Λύση



Τα φαινόμενα που αναφέρονται στην εκφώνηση περιγράφονται στο σχήμα.



**Δ1)** Το συσσωμάτωμα μάζας  $(M + m_2)$  , αμέσως μετά την κρούση, αρχίζει να κινείται διαγράφοντας κυκλική τροχιά ακτίνας  $R = \ell$  .

Η συνισταμένη των δυνάμεων, που δρουν στο συσσωμάτωμα, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

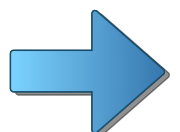
$$F - (M + m_2)g = \frac{(M + m_2)v^2}{\ell} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{[F - (M + m_2)g] \cdot \ell}{M + m_2}} \quad (1)$$

Επίσης  $m_1 + m_2 = m \Rightarrow 2m_2 + m_2 = m \Rightarrow m_2 = \frac{m}{3} = 1kg$

και  $m_1 = 2m_2 = 2kg$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$v = \sqrt{\frac{[90N - (3kg + 1kg) \cdot 10m/s^2] \cdot 2m}{3kg + 1kg}} \Rightarrow v = 5m/s$$



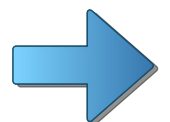
**Δ2)** Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε για το συσσωμάτωμα, μεταξύ των θέσεων αμέσως μετά την κρούση και στη μέγιστη εκτροπή. Επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό της αρχικής θέσης.

$$E_{\mu\eta\chi.\alpha\rho\chi.} = E_{\mu\eta\chi.\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow 0 + \frac{1}{2}(M + m_2)v^2 = (M + m_2) \cdot gh + 0 \Rightarrow$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(5m/s)^2}{2 \cdot 10m/s^2} \Rightarrow h = 1,25m$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\ell - h}{\ell} = \frac{2m - 1,25m}{2m} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,375$$



**Δ3)** Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση του σώματος μάζας  $m_2$  με το σώμα μάζας  $M$ .

$$\vec{p}_{\pi\rho\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow m_2 v_2 = (M + m_2) v \Rightarrow v_2 = \frac{(M + m_2) v}{m_2} \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{(3\text{kg} + 1\text{kg}) \cdot 5\text{m/s}}{1\text{kg}} \Rightarrow v_2 = 20\text{m/s}$$

Στην έκρηξη δρουν εσωτερικές δυνάμεις, οπότε ισχύει η Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{\pi\rho\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow 0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow 2m_2 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow$$

$$2v_1 = v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{2} \Rightarrow v_1 = 10\text{m/s}$$

**Δ4)** Η δύναμη επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\epsilon\pi\alpha\nu} = -k \cdot x \Rightarrow F_{\epsilon\pi\alpha\nu} = -k \cdot A \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των  $k$ ,  $A$ ,  $\omega$  και  $\varphi_0$ .

Επειδή τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι  $\pi$ , δηλαδή  $\varphi_0 = \pi$ .



Η ταχύτητα σε μια ταλάντωση μηδενίζεται κάθε  $\frac{T}{2}$ , άρα:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{10}s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10}s \quad \text{και} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10\text{rad/s}$$

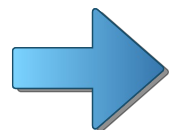
Από την  $D = k = (m' + m_1) \cdot \omega^2$  βρίσκουμε τη σταθερά του ελατηρίου

$$D = k = (2\text{kg} + 2\text{kg}) \cdot (10\text{rad/s})^2 \Rightarrow D = k = 400\text{N/m}$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση του σώματος μάζας  $m_1$  με το σώμα μάζας  $m'$ .

$$\vec{p}_{\pi\rho\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow -m_1 v_1 = -(m' + m_1)V' \Rightarrow V' = \frac{m_1 v_1}{m' + m_1} \Rightarrow$$

$$V' = \frac{2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}}{2\text{kg} + 2\text{kg}} \Rightarrow V' = 5\text{m/s}$$



Ακριβώς μετά την κρούση το συσσωμάτωμα  
μάζας  $(m' + m_1)$  διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του οπότε  
ισχύει:  $V' = V_{\max}$ .

Αλλά:  $V' = V_{\max} = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{V'}{\omega} = \frac{5\text{m/s}}{10\text{rad/s}} \Rightarrow A = 0,5\text{m}$ .

Με αντικατάσταση των τιμών των  $k$ ,  $A$ ,  $\omega$  και  $\varphi_0$  στη σχέση (2)  
παίρνουμε:

$$F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -400 \cdot 0,5 \cdot \eta\mu(10t + \pi)(SI) \Rightarrow F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = 200\eta\mu(10t)(SI)$$

