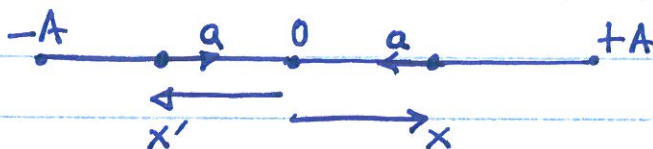


(1)

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

$$F = m \cdot a = -m\omega^2 x = -D \cdot x$$

($D = m\omega^2$)

$$(0 \leq \varphi_0 < 2\pi)$$

$$\eta \mu \varphi_0 = \frac{d}{A} \quad (d: \text{απομάκρυνση για } t=0)$$

$$\text{Περίοδος: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{ανεξάρτητη του πλάτους!})$$

$$\text{Συχνότητα } f = \frac{N}{t} \text{ ή } f = \frac{1}{T} \quad (T \in \text{sec}, f \in \text{Hz})$$

$$\text{Γων. συχνότητα: } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\omega \in \text{rad/s})$$

$$\text{Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας: } \frac{dv}{dt} = a = -\omega^2 \cdot x$$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{ορμής: } \frac{dp}{dt} = \sum F = -D \cdot x$$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{κιν. ενέργειας: } \frac{dK}{dt} = \sum F \cdot v = -D \cdot x \cdot v$$

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{δυν. // } \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = +D \cdot x \cdot v$$

$$\text{Κινητική: } K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{Δυναμική: } U = \frac{1}{2} D x^2$$

$$\text{Ολική: } E = \frac{1}{2} D A^2$$

$$(\text{ΑΔΕΤ}): E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

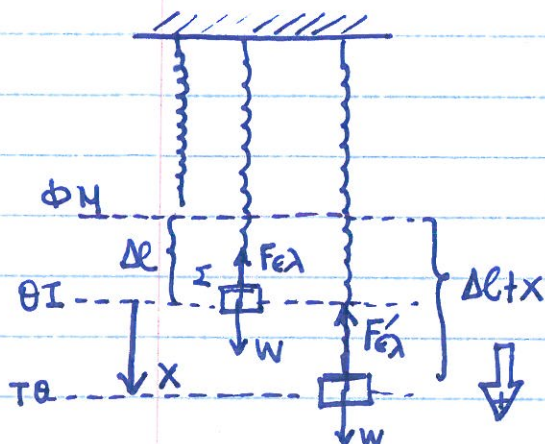
$$\Rightarrow m\omega^2 A^2 = m v^2 + m\omega^2 x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}}$$

(2)

ΠΕΡΙΗΤΟΣΕΙΣ

1) Πως δείχνω ότι ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ



$$(ΘΙ): \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = m \cdot g \Rightarrow k \Delta \ell = mg \quad (1)$$

$$(Τ.Θ): \Sigma F = W - F_{ελ} = mg - k(\Delta \ell + x) \Rightarrow$$

$$\Sigma F = \cancel{mg} - \cancel{k\Delta \ell} - kx \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F &= -k \cdot x \\ \Sigma F &= -D \cdot x \end{aligned} \right\} D = k, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ (Σ)ΕΛΑΤΗΡΙΟ

x: απομάκρυνση από ΘΙ

Δℓ: παραμόρφωση από ΦΜ

 $\Sigma F = -k \cdot x$: δύναμη επαναφοράς
 ↳ έχει φορά προς ΘΙ

 $F_{ελ} = k \Delta \ell$: δύναμη ελατηρίου
 ↳ έχει φορά προς ΦΜ

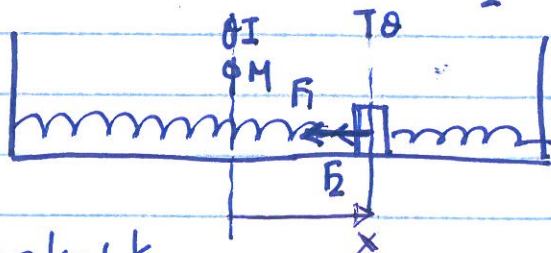
$$U_{εαλ} = \frac{1}{2} k x^2$$

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k \Delta \ell^2$$

$$\text{Έργο δύναμης επαναφοράς: } W_{\Sigma F} = K_2 - K_1 = U_1 - U_2 = \frac{1}{2} D (x_1^2 - x_2^2)$$

(1 → 2) (λόγω ΑΔΕΤ: $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$)

$$\text{Έργο δύναμης ελατηρίου: } W_{F_{ελ}} = U_{ελ1} - U_{ελ2} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_1^2 - \Delta \ell_2^2)$$

2) Παράλληλα ελατήρια:

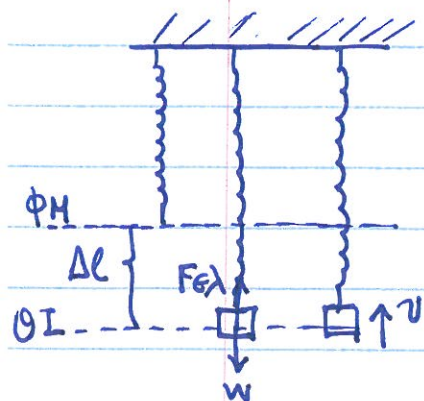
$$\left. \begin{aligned} \Sigma F &= -(k_1 + k_2) \cdot x \\ \Sigma F &= -D \cdot x \end{aligned} \right\}$$

$$D = k_1 + k_2$$

(3)

ΤΡΟΠΟΙ ΝΑ ΞΕΚΙΝΗΣΕΙ ΤΑΛΑΝΤΟΣΗ ΣΕ ΜΑ ΔΕΜΕΝΟ ΣΕ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

1) Αν το εκτοξεύω από τη ΘΙ με $v \neq 0$ (για $t_0 = 0$)



Αφού το εκτοξεύω από τη ΘΙ :

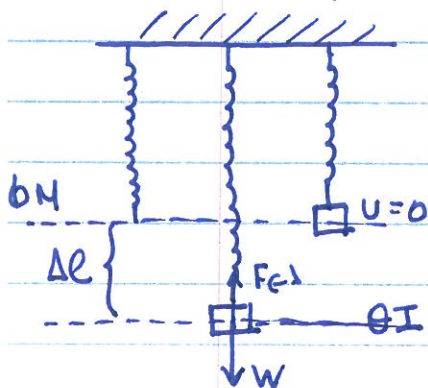
$$v = v_{\max} = \omega \cdot A, \text{ όπου } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Στο ίδιο καταλήγω με ΑΔΕΤ :

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = A \sqrt{\frac{k}{m}} (= \omega \cdot A)$$

2) Αν το ανυψώσω στο ΦΜ ή το αφήσω ελεύθερο ($t_0 = 0$)



$$(\Theta I): \sum F = 0 \Rightarrow k \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

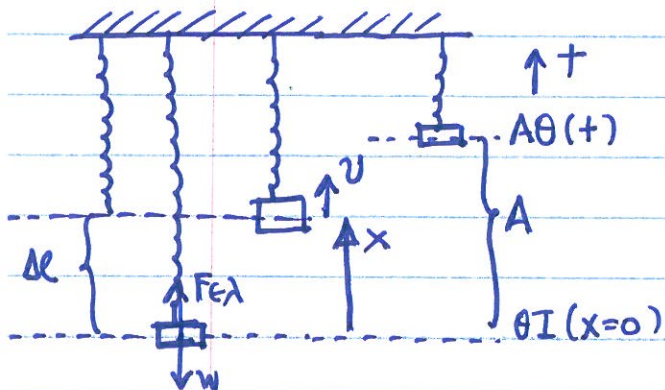
$$(\Phi M): E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm A$$

$$\bullet \text{ Αν } (\uparrow +) \text{ τότε } x = +A \text{ ή } \varphi_0 = \pi/2$$

$$\bullet \text{ Αν } (\downarrow +) \text{ τότε } x = -A \text{ ή } \varphi_0 = 3\pi/2$$

3) Αν το ανυψώσω στο ΦΜ ή το εκτοξεύω με $v \neq 0$ ($t_0 = 0$)



$$(\Theta I): \sum F = 0 \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

Σ' αυτή την περίπτωση για $t_0 = 0$
είναι $x = \Delta l = \frac{mg}{k}$. Εφαρμόζω

$$ΑΔΕΤ: E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

(4)

(3) δυνάμειδ: $A = \sqrt{\frac{mv^2}{k} + x^2}$

όπου $x = \Delta l = \frac{mg}{k}$. Για να βρω φ_0 θεω $x = \frac{mg}{k} = d$

$d = A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \sin \varphi_0 = \frac{d}{A}$ ή λύση των τριγ. επίσω-

δυ ως προς φ_0 . Επιλέγω την φ_0 που ικανοποιεί τη θετική φορά για την v (αν είναι όπως στο σχήμα).

Π.χ αν προκύψει $x = d = A/2$:

$\frac{A}{2} = A \sin \varphi_0 \Rightarrow \sin \varphi_0 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$
 $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$
 $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$

$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0}$

$v = \omega A \cos \varphi_0$

 $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \rightarrow v = \omega A \cos \frac{\pi}{6} > 0$
 $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \rightarrow v = \omega A \cos \frac{5\pi}{6} < 0$

 $\left| \begin{array}{l} A \uparrow + \text{ τότε} \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \end{array} \right.$

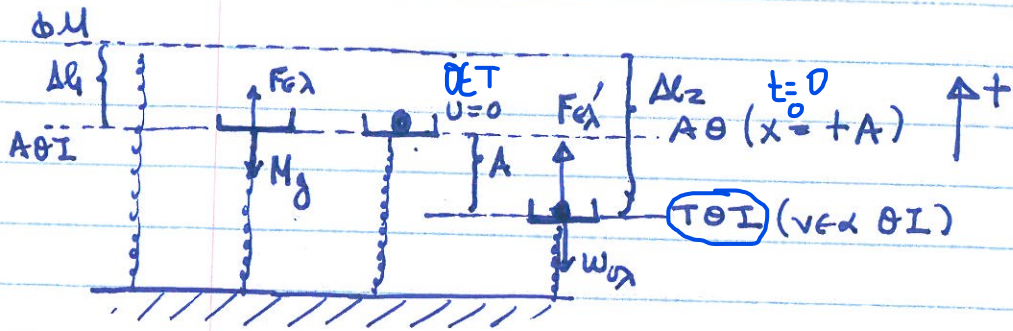
Κατά την ΑΑΤ:

- Μέγιστη δυναμική κίνηση ταλάντωσης: $V_{\max} = \frac{1}{2} k A^2$
- Ελάχιστη —//— —//— —//— : $V_{\min} = 0$
- Μέγιστη δυν. κίνηση ελαττώσι: $V_{\max} = \frac{1}{2} k (\Delta l + A)^2$
- Αν $A < \Delta l$ η $V_{\min} = \frac{1}{2} k (\Delta l - A)^2$
- Αν $A \geq \Delta l$ η $V_{\min} = 0$ (όταν διέρχεται από το ΦΜ)
- Μέγιστη δυναμική επαφής: $F_{\max} = kA$
- —//— —//— ελαττώσι: $F_{\max} = k \cdot (\Delta l + A)$

5

ΠΟΤΕ ΑΛΛΑΖΕΙ Η ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.

① Αν τοποθετώ σώμα m πάνω σε δίσκο M χωρίς v_0 :



$$D = k = (m + m_n) \omega^2$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E = \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k} \right)$$

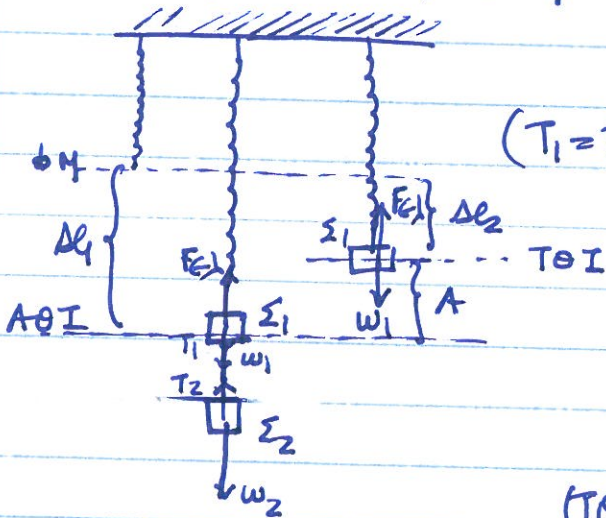
$$E = \frac{m^2 c^2}{2k}$$

(A0I): $\sum F = 0 \Rightarrow k \Delta l_1 = M_g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{M_g}{k}$

(Teil I): $\Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta l_2 = (M + m)g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{(M + m)g}{k}$

$$A = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1 = \frac{mg}{k} : \text{ηλάχιστο τεταμένο}$$

2) Αν έχω δύο βώματα Σ_1, Σ_2 ∇ κόψω το νήμα που τα συνδέει!



(AOI): $\sum_1 \rightarrow \sum F = 0 \Rightarrow$
 $F_{el} = T + W_1 \quad \text{①}$

$$\textcircled{\xi_2} \rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = W_2 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow F_{\text{cl}} = w_1 + w_2 \Rightarrow$$

$$\Delta \ell_1 = \frac{(w_1 + w_2)g}{k}$$

$$(TOI): \Delta f = 0 \Rightarrow k \Delta \ell_2 = m_1 g \Rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{m_1 g}{k}$$

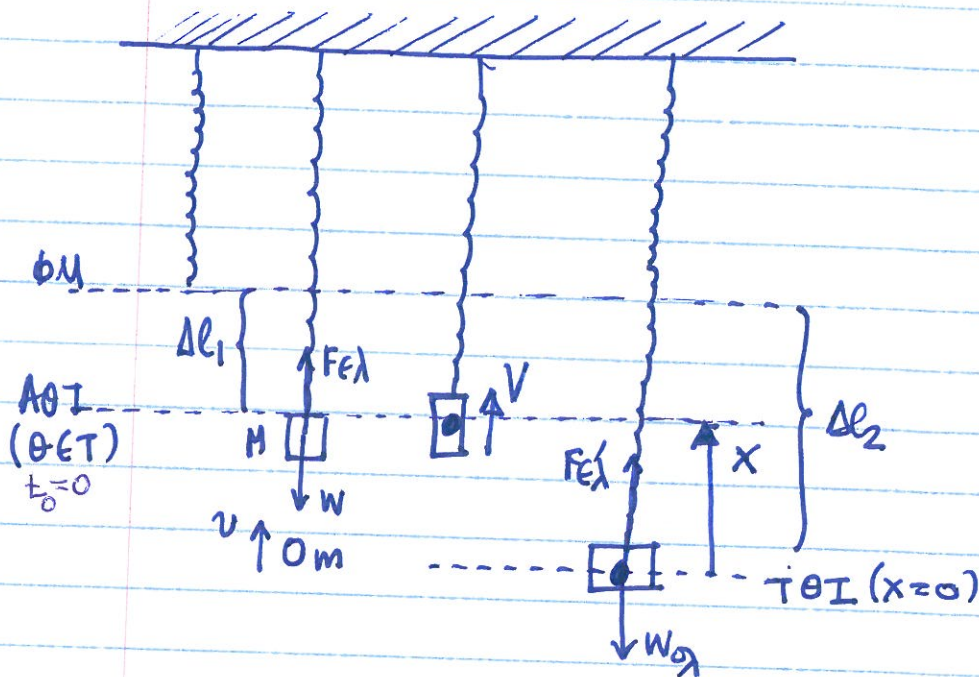
Apakah $A = \Delta l_1 - \Delta l_2 = \frac{m_2 g}{k}$

- $A_V (\uparrow +)$ Totz γ_{19} $t=0$, $x=-A$ $\propto p \propto \varphi_0 = \frac{3\eta}{2} r_{ad}$

• $A_V(\downarrow +)$ --- γ_{1a} $t=0$, $x=+A$, $\dot{x} < 0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad

⑥

③ Κρούση πλαστική + ΑΑΤ



$$(\text{ΑΘΙ}): \sum F=0 \Rightarrow k\Delta l_1 = Mg \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{Mg}{k}$$

$$(\text{ΤΘΙ}): \sum F=0 \Rightarrow k\Delta l_2 = (M+m)g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{(M+m)g}{k}$$

$$\text{Στη θ.ε.τ (θεση έναρξης ταλαντώσεως): } |x| = \Delta l_2 - \Delta l_1 = \frac{mg}{k}$$

$$(\text{ΑΔΕΤ}): \mathcal{E} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m+M) V^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad (1)$$

$$\text{όπου από (ΑΔΟ): } mv = (M+m) V \Rightarrow V = \frac{mv}{M+m} \quad (2)$$

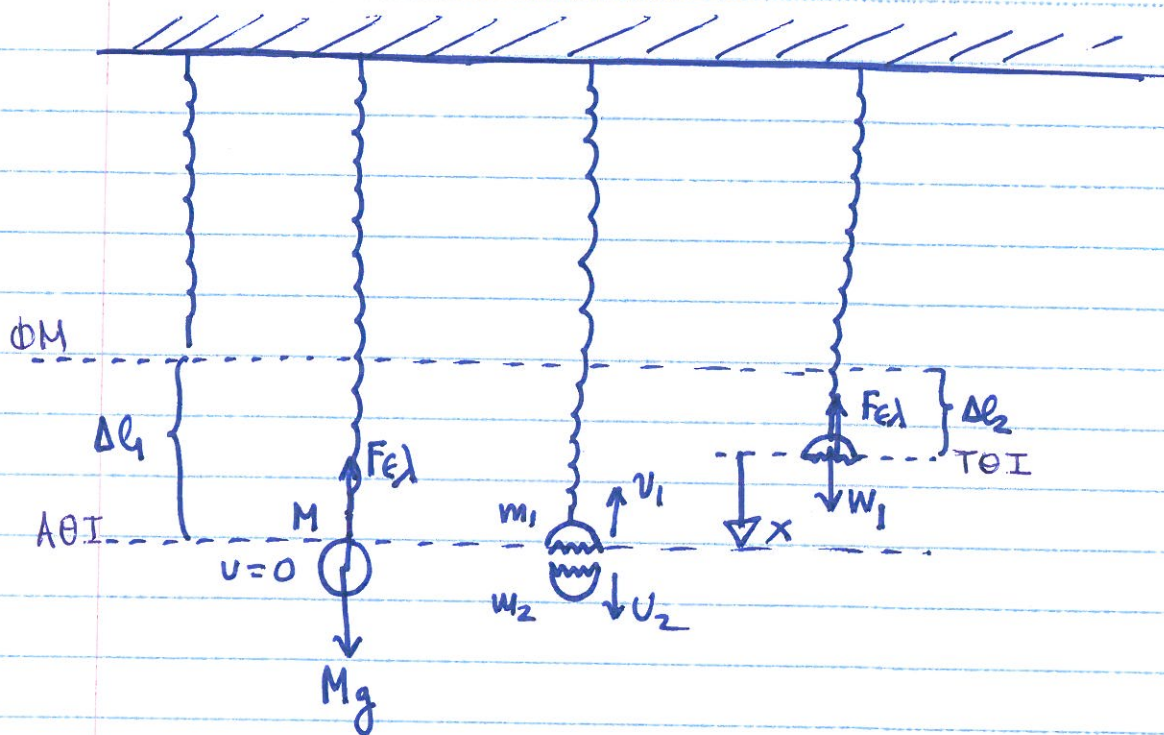
Από (1) & (2) βρίσκω το $A = \dots$

Αν το συσ. κατά την ΑΑΤ μας δέει ότι φτάνει μέχρι το φυσ. μήκος των ελατηρίων, τότε:

$$A = \Delta l_2 = \frac{(M+m)g}{k} \quad (\text{η άνω ΑΘ ταυίζεται με το φμ})$$

7

4) ΕΚΡΗΞΗ + ΑΑΤ



$$(ΑΘΙ): \sum F = 0 \Rightarrow k \Delta l_1 = Mg \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{Mg}{k} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

$$(ΤΘΙ): \sum F = 0 \Rightarrow k \Delta l_2 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{m_1 g}{k}$$

$$|x| = \Delta l_1 - \Delta l_2 = \frac{m_2 g}{k}$$

$$(ΑΔΕΤ): \mathcal{E} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad (1)$$

$$\text{Όπου από ΑΔΟ: } P_{\text{αρχ}} = P_{\text{τελ}} \Rightarrow 0 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \Rightarrow$$

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2}$$

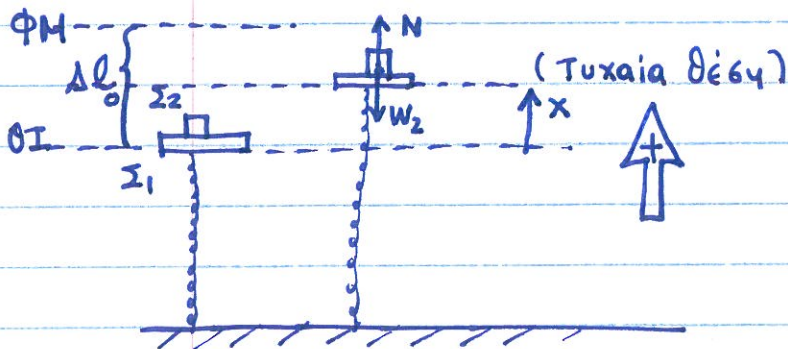
• Ενέργεια που απελευθερώθηκε από την έκρηξη:

$$E_{\text{απελ}} = \Delta E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (\text{εφ' όσον όλη η ενέργεια που απελευθερώνεται μετατρέπεται σε κινητική των σφαιρών})$$

⑧

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

① Σώματα σε επαφή - ελατήριο



ΣΤΥ ΘΙ :

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta l_0 = (w_1 + w_2)g$$

$$\Rightarrow \Delta l_0 = \frac{(w_1 + w_2)g}{k}$$

Κοινή η περίοδος : $T = 2\pi \sqrt{\frac{w_1 + w_2}{k}}$

-// - η γων. συχνότητα : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{w_1 + w_2}}$

- Σταθερά επαναφοράς Σ_1 : $D_1 = w_1 \omega^2$
- -// - -// - Σ_2 : $D_2 = w_2 \omega^2$

ΣΤΥΝ Τ.Θ. (Σ_2) : $\Sigma F = -D_2 \cdot x \overset{(\uparrow+)}{\Rightarrow} N - w_2 g = -D_2 \cdot x \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = w_2 g - w_2 \omega^2 \cdot x$$

Για να μην αποσπώνται το Σ_2 : $N \geq 0 \Rightarrow$

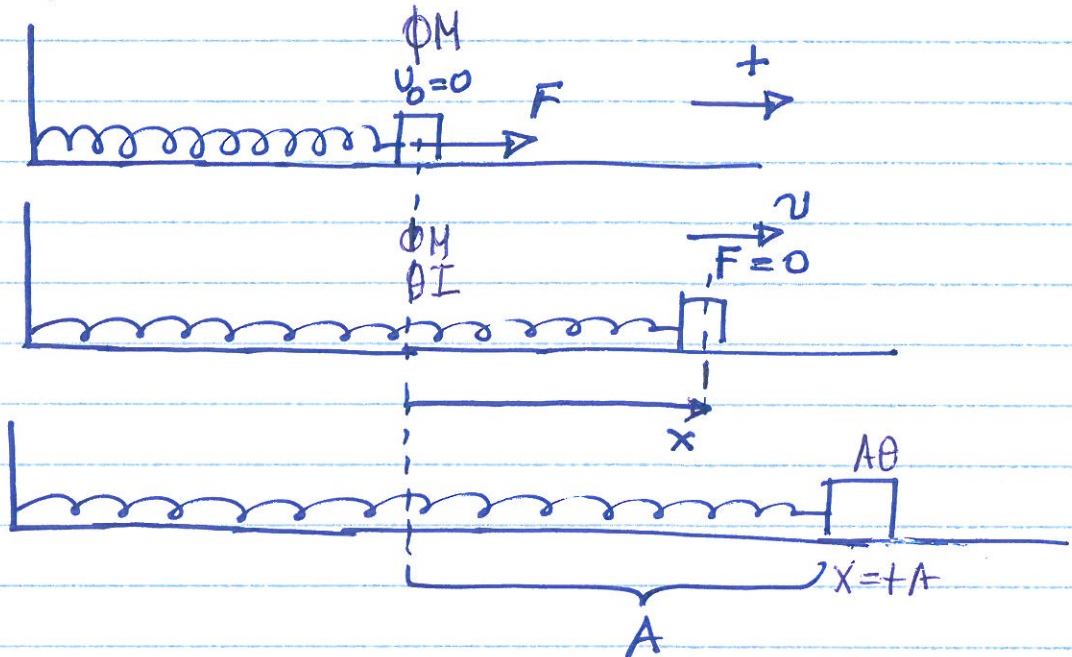
$$\Rightarrow w_2 g - w_2 \omega^2 x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{g}{\omega^2}$$

Άρα $A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\left(\sqrt{\frac{k}{w_1 + w_2}}\right)^2} = \frac{(w_1 + w_2)g}{k} = \Delta l_0$

Διηλαδή αν $A > \Delta l_0$ η απόσπαση γίνεται στο ΦΜ (!)
(Λογικό, γιατί μετά το ΦΜ η $F_{ελ}$ αλλάζει φορά & επιβραδύνει ΜΟΝΟ το Σ_1 που είναι σε επαφή με το ελατήριο).

9

2) Δίνεται πω καταργείται ακαριαία σε βυφα δέφρω σε ελατφριο :



⚠ Στην δέφω καταργέφω της F το βυφα έφει $v \neq 0$ Για να θρω το πλάτος :

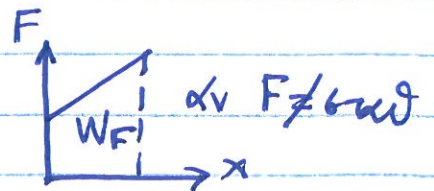
Α' τφωος : (ΘΜΚΕ) : $\frac{1}{2} m v^2 - 0 = W_F + W_{Fελ}$ ①

- Αν m $F = \text{σταθ}$ τότε $W_F = F \cdot x$
- Αν m $F \neq \text{σταθ}$ βρίσκω W_F από εφβαδόν στο $F \cdot x$
- Το $W_{Fελ} = U_{ελ1} - U_{ελ2} = -\frac{1}{2} k x^2$

① $\Rightarrow v = \dots$ Μετά (ΑΔΕΤ) : $\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$
 $\Rightarrow A = \dots$

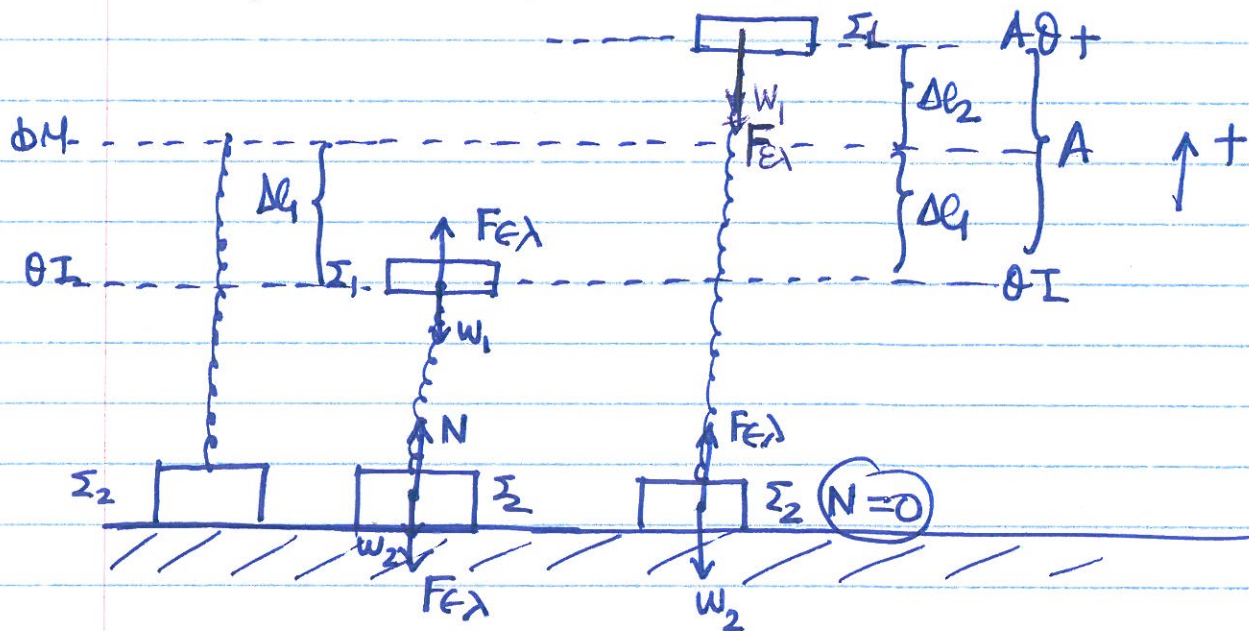
Β' τφωος $W_F = \overset{*}{Eταλ} = \frac{1}{2} k A^2$ όπου k πάλι : $W_F = F \cdot x$
 αν $F = \text{σταθ}$

(το W_F εκφράζει την ενέργεια που προσεφέρθηκε στο βυφα μέχρι την κατάργέφω της $\rightarrow$ μετατραπήκε σε ελατφ)



(10)

③ Δύο σωμάτια - ελατήριο εκτεταμένο - απόσπαση τω Σ_2



• Όσο το Σ_1 είναι κάτω από το ΦΜ το Σ_2 δεν υπάρχει περίπτωση να αποσπαστεί (η $F_{ελ} \downarrow$)

• Αν $A > \Delta \ell_1$ τότε υπάρχει περίπτωση όταν άνω Αθ να έχω $\Delta \ell_2 = A - \Delta \ell_1$ ①, το οποίο θα παύσει

$$F_{ελ} = k \Delta \ell_2 \text{ ώστε στο } \Sigma_2: \Sigma F = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{N} + F_{ελ} - w_2 = 0 \Rightarrow k \Delta \ell_2 = w_2 g \Rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{w_2 g}{k} \quad (2)$$

Για να συμβεί όπως αυτό :

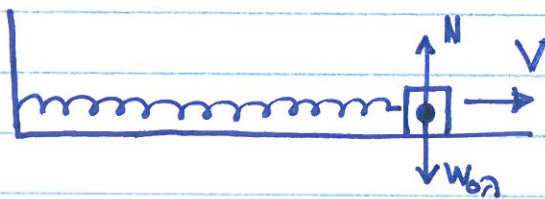
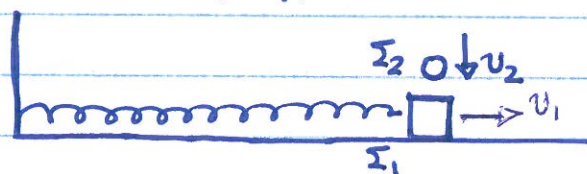
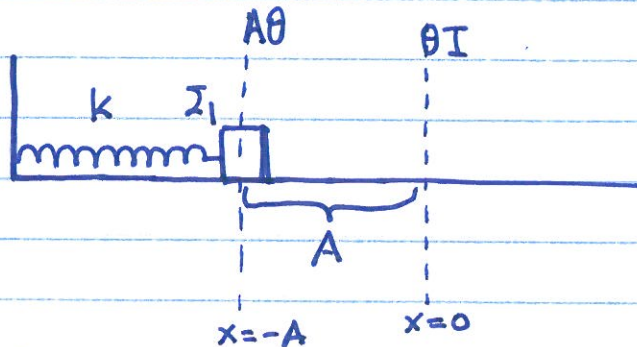
$$\textcircled{1} \Rightarrow A = \Delta \ell_1^* + \Delta \ell_2 = \frac{w_1 g}{k} + \frac{w_2 g}{k} = \frac{(w_1 + w_2) g}{k}$$

Άρα αν $A \geq \frac{(w_1 + w_2) g}{k}$ το Σ_2 θα αποσπαστεί από το οριζόντιο δάκτυλο.

$$* \text{ ΘΙ: } \Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta \ell_1 = w_1 g \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{w_1 g}{k}$$

(11)

- ④ Μη μέτωπική κρούση σε κάθετες δ/νσεις και ΑΑΤ σε οριζόντιο ελατήριο



Το Σ_1 ξεκινά από ΑΘ ($x = -A$) μόλις διέρχεται από ΘΙ συγκρούεται πλαστικά με το Σ_2 που κάνει ελ. πώση. Στη συνέχεια το σύστημα εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος Αδυσγ.

• Στην ΘΙ: $v_1 = v_{\max} = \omega \cdot A = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \cdot A$

(ΑΔΟ): $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{k}{m_1}} A \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{k m_1}{(m_1 + m_2)^2}} \cdot A \quad (1)$

- Αμέσως μετά την κρούση, το συσσωματωμα βρίσκεται στη ΘΙ (η ΘΙ δεν αλλάζει αφού η Ν εξουδετερώνει το $W_{6\gamma}$)

Άρα $V = \omega' \cdot A_{\text{δυσγ}} \quad (2)$ όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad (3)$

Άρα $(2) \xrightarrow{(1)(3)} \sqrt{\frac{k m_1}{(m_1 + m_2)^2}} \cdot A = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A_{\text{δυσγ}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{δυσγ}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \cdot A$

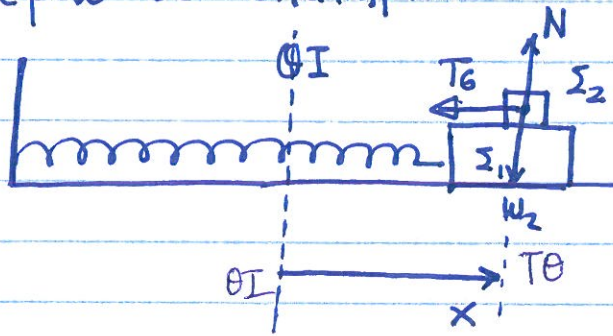
Ποσοστό απώλειας Κ :

$\eta(\%) = \frac{K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}} 100\% =$

$= \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2} \right] 100\%$

(19)

- ⑤ Συνδίκη μη ολισθητής βάρης Σ_2 πάνω σε άλλο (Σ_1) δεμένο σε ελατήριο



- Η T_6 λειτουργεί ως δύναμη επαναφοράς για το Σ_2
 - Τα Σ_1 & Σ_2 έχουν κοινή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$
 - Σταθερά επαναφοράς του Σ_2 : $D_2 = m_2 \omega^2 = \frac{k m_2}{m_1+m_2}$
 - Συνήκη για ΑΑΤ (Σ_2): $\Sigma F = -D_2 x \Rightarrow T_6 = -D_2 \cdot x$
($-A \leq x \leq +A$)
- Είτις ακραίες θέσεις ($x = \pm A$): $T_{6\max} = D_2 \cdot A$ ή

$$T_{6\max} = \frac{k m_2}{m_1+m_2} \cdot A$$

- Συνήκη για να μην ολισθήσει το Σ_2 ως προς Σ_1 :

$$T_{6\max} \leq T_{op} \Rightarrow \mu_6 \cdot N \leq D_2 \cdot A \Rightarrow \mu_6 \cdot N \geq \frac{k m_2}{m_1+m_2} A \quad (1)$$

Όπως $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = m_2 g$ (για Σ_2)

Αρα ① $\Rightarrow \mu_6 m_2 g \geq \frac{k m_2}{m_1+m_2} A \Rightarrow \boxed{\mu_6 \geq \frac{k A}{(m_1+m_2)g}}$

Συνέπως $\mu_{6\min} = \frac{k A}{(m_1+m_2)g}$ (ελάχιστος συντελεστής ορ. τριβής)