

Αρχές Οικονομικής θεωρίας

Ασκήσεις 4 και 7 του σχολικού βιβλίου

Άσκηση 4 (γραμμικές συναρτήσεις)

Για ένα αγαθό με γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς, στην τιμή των 8 ευρώ η ζητούμενη ποσότητα είναι 300 μονάδες και η προσφερόμενη ποσότητα 200 μονάδες. Αν είναι γνωστό ότι, όταν μεταβάλλεται η τιμή από τα 8 ευρώ προς την τιμή ισορροπίας, η ελαστικότητα της ζήτησης είναι -0,4 και η ελαστικότητα της προσφοράς 0,4, να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας. Σε ποια τιμή θα έχουμε πλεόνασμα 200 μονάδες;

Ο υπολογισμός της τιμής και της ποσότητας ισορροπίας σε τρία βήματα

Βήμα 1°: Ο προσδιορισμός της συνάρτησης ζήτησης

Επειδή η συνάρτηση ζήτησης είναι γραμμική ισχύει:

$$Q_D = \alpha + \beta \cdot P, \alpha > 0 \text{ και } \beta < 0$$

Στην τιμή των 8 ευρώ η ζητούμενη ποσότητα είναι 300 μονάδες. Άρα, ισχύει η σχέση:

$$300 = \alpha + 8 \cdot \beta \quad (1)$$

Στην τιμή των 8 ευρώ υπάρχει έλλειμμα ($Q_D=300 > Q_S=200$) άρα η τιμή θα αυξηθεί έως την τιμή ισορροπίας P_E . Καθώς η τιμή αυξάνεται από 8 ευρώ σε P_E , οι καταναλωτές θα αντιδράσουν και θα μειώσουν τη ζητούμενη ποσότητα από 300 σε Q_E (λόγω του νόμου της ζήτησης, αφού η τιμή αυξήθηκε η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί). Σύμφωνα με την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή έχουμε:

$$\begin{aligned} E_D &= \frac{\Delta Q_D}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_{D1}} \Rightarrow \\ -0.4 &= \beta \cdot \frac{8}{300} \Rightarrow \\ -0.4 \cdot \frac{300}{8} &= \beta \Rightarrow \\ \beta &= -15 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το $\beta = -15$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$300 = \alpha - 8 \cdot 15 \Rightarrow 300 = \alpha - 120 \Rightarrow \alpha = 420.$$

Άρα, η συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$Q_D = 420 - 15 \cdot P$$

Βήμα 2°: Ο προσδιορισμός της συνάρτησης προσφοράς

Επειδή η συνάρτηση προσφοράς είναι γραμμική ισχύει:

$$Q_S = \gamma + \delta \cdot P, \delta > 0$$

Στην τιμή των 8 ευρώ η προσφερόμενη ποσότητα είναι 200 μονάδες. Άρα, ισχύει η σχέση:

$$200 = \gamma + 8 \cdot \delta \quad (2)$$

Στην τιμή των 8 ευρώ υπάρχει έλλειμμα ($QD=300 > QS=200$) άρα η τιμή θα αυξηθεί έως την τιμή ισορροπίας PE . Καθώς η τιμή αυξάνεται από 8 ευρώ σε PE , οι παραγωγοί θα αντιδράσουν και θα αυξήσουν την προσφερόμενη ποσότητα από 200 σε QE (λόγω του νόμου της προσφοράς, αφού η τιμή αυξήθηκε η προσφερόμενη ποσότητα θα αυξηθεί). Σύμφωνα με την ελαστικότητα προσφοράς ως προς την τιμή έχουμε:

$$\begin{aligned} E_S &= \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_{S1}} \Rightarrow \\ 0.4 &= \delta \cdot \frac{8}{200} \Rightarrow \\ 0,4 \cdot \frac{200}{8} &= \delta \Rightarrow \\ \delta &= 10 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το $\delta=10$ στη σχέση (2) έχουμε:

$$200 = \gamma + 8 \cdot 10 \Rightarrow 200 = \gamma + 80 \Rightarrow \gamma = 120.$$

Άρα, η συνάρτηση προσφοράς είναι:

$$Q_S = 120 + 10 \cdot P$$

Βήμα 3°: Ο προσδιορισμός της τιμής και της ποσότητας ισορροπίας

Στην τιμή ισορροπίας PE ισχύει: $QD=QS \Rightarrow PE=12$ ευρώ και $QE=240$ μονάδες.

Έστω P_2 η τιμή στην οποία το πλεόνασμα είναι 200 μονάδες αυτό σημαίνει ότι:

$$\begin{aligned} Q_S - Q_D &= 200 \Rightarrow \\ (120 + 10 \cdot P_2) - (420 - 15 \cdot P_2) &= 200 \Rightarrow \\ 25 \cdot P_2 - 300 &= 200 \Rightarrow \\ 25 \cdot P_2 &= 500 \Rightarrow \\ P_2 &= 20 \text{ ευρώ.} \end{aligned}$$

Άσκηση για το σπίτι σαν την άσκηση 4 του σχολικού βιβλίου

Για ένα αγαθό με γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς, στην τιμή των 20 ευρώ η ζητούμενη ποσότητα είναι 400 μονάδες και η προσφερόμενη ποσότητα 500 μονάδες. Αν είναι γνωστό ότι, όταν μεταβάλλεται η τιμή από τα 20 ευρώ προς την τιμή ισορροπίας, η ελαστικότητα της ζήτησης είναι -1,5 και η ελαστικότητα της προσφοράς 0,8, να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας. Σε ποια τιμή θα έχουμε έλλειμμα 100 μονάδες; (**2^η εκδοχή της παραπάνω άσκησης:** Μπορείτε να λύσετε την άσκηση χωρίς την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς είναι γραμμικές;)

Άσκηση 7 (γραμμικές συναρτήσεις)

Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός προϊόντος είναι γραμμικές. Όταν το εισόδημα των καταναλωτών είναι 300.000 ευρώ, η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας είναι 20 ευρώ και 180 κιλά αντίστοιχα. Αν το εισόδημα γίνει 350.000 ευρώ, για το νέο σημείο ισορροπίας η τιμή και η ποσότητα είναι 30 ευρώ και 220 κιλά αντίστοιχα.

α) Να βρεθεί η εξίσωση προσφοράς.

Επειδή η συνάρτηση προσφοράς είναι γραμμική ισχύει:

$$Q_S = \gamma + \delta \cdot P, \delta > 0$$

Το αρχικό και το νέο σημείο ισορροπίας ανήκουν στην καμπύλη προσφοράς. Άρα, επαληθεύουν την εξίσωσή της (αφού η συνάρτηση προσφοράς και η καμπύλη της προσφοράς δεν έχουν μεταβληθεί). Συνεπώς:

$$180 = \gamma + 20 \cdot \delta \quad (1) \text{ (από το αρχικό σημείο ισορροπίας)}$$

$$220 = \gamma + 30 \cdot \delta \quad (2) \text{ (από το νέο σημείο ισορροπίας)}$$

Αφαιρώντας της σχέσεις (2), (1) κατά μέλη (2)-(1), έχουμε:

$$40 = 10 \cdot \delta \Rightarrow \delta = 4$$

Αντικαθιστώντας το $\delta = 4$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$180 = \gamma + 20 \cdot 4 \Rightarrow 180 = \gamma + 80 \Rightarrow 180 - 80 = \gamma \Rightarrow \gamma = 100$$

Άρα, η συνάρτηση προσφοράς είναι:

$$Q_S = 100 + 4 \cdot P$$

β) Αν στην τιμή $P = 20$ ευρώ η εισοδηματική ελαστικότητα είναι 2, να βρεθεί η εξίσωση ζήτησης που αντιστοιχεί στο εισόδημα των 350.000 ευρώ.

Επειδή η νέα συνάρτηση ζήτησης (με το νέο εισόδημα) είναι γραμμική ισχύει:

$$Q_D = \alpha + \beta \cdot P, \alpha > 0 \text{ και } \beta < 0$$

Το νέο σημείο ισορροπίας ανήκει στη νέα καμπύλη ζήτησης και επαληθεύει την εξίσωσή της. Άρα, ισχύει η σχέση:

$$220 = \alpha + 30 \cdot \beta \quad (3)$$

Για τον προσδιορισμό της νέας συνάρτησης ζήτησης απαιτείται ένα ακόμα σημείο της (ώστε να κάνουμε σύστημα και να βρούμε τις τιμές των α και β). Το σημείο αυτό θα βρεθεί με τη βοήθεια της εισοδηματικής ελαστικότητας. Στην τιμή των 20 ευρώ οι καταναλωτές ζητούσαν με το αρχικό εισόδημα ($Y_1 = 300.000$ ευρώ) ποσότητα 180 μονάδων. Με το νέο εισόδημα ($Y_2 = 350.000$ ευρώ) και στην ίδια τιμή, οι καταναλωτές ζητούν, σύμφωνα με την εισοδηματική ελαστικότητα ποσότητα Q_{D2} τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} E_Y &= \frac{\Delta Q_D}{\Delta Y} \cdot \frac{Y_1}{Q_{D1}} \Rightarrow \\ 2 &= \frac{Q_{D2} - 180}{350.000 - 300.000} \cdot \frac{300.000}{180} \Rightarrow \\ 2 &= \frac{Q_{D2} - 180}{50.000} \cdot \frac{300.000}{180} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{Q_{D2} - 180}{50.000} \cdot \frac{300.00}{18} \Rightarrow \\
2 &= \frac{Q_{D2} - 180}{5} \cdot \frac{3}{18} \Rightarrow \\
2 &= \frac{Q_{D2} - 180}{5} \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow \\
2 &= \frac{Q_{D2} - 180}{30} \Rightarrow \\
2 \cdot 30 &= Q_{D2} - 180 \Rightarrow \\
60 &= Q_{D2} - 180 \Rightarrow \\
Q_{D2} &= 240
\end{aligned}$$

Άρα, στην τιμή των 20 ευρώ η ζητούμενη ποσότητα είναι 240 μονάδες. Συνεπώς, ισχύει η σχέση:

$$240 = \alpha + 20 \cdot \beta \quad (4)$$

Αφαιρώντας της σχέσεις (4), (3) κατά μέλη (3)-(4), έχουμε:

$$-20 = 10 \cdot \beta \Rightarrow \beta = -2$$

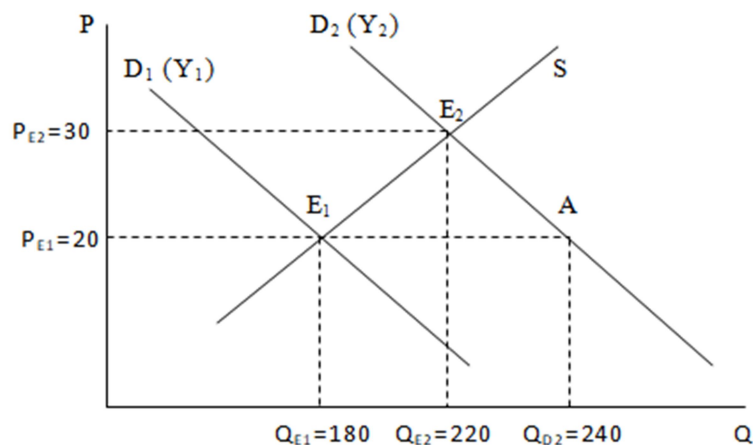
Αντικαθιστώντας το $\beta = -2$ στη σχέση (4) έχουμε:

$$240 = \alpha - 20 \cdot 2 \Rightarrow 240 = \alpha - 40 \Rightarrow 240 + 40 = \alpha \Rightarrow \alpha = 280$$

Άρα, η νέα συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$Q_{D\text{νέα}} = 280 - 2 \cdot P$$

Βοηθητικό διάγραμμα κατανόησης της άσκησης



Τα σημεία ισορροπίας (E_1 και E_2) ανήκουν στην καμπύλη προσφοράς και επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Στη νέα καμπύλη ζήτησης ανήκουν το νέο σημείο ισορροπίας (E_2) και το σημείο A. Το σημείο A προσδιορίζεται από την εισοδηματική ελαστικότητα. Η εισοδηματική ελαστικότητα συνδέει τα σημεία E_1 και A όπου η τιμή παραμένει σταθερή και ίση με 20 ευρώ.

Σημείωση: Η ζήτηση του αγαθού έχει αυξηθεί. Αυτό γίνεται αντιληπτό επειδή η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας αυξήθηκαν λόγω της αύξησης του εισοδήματος.

Άσκηση για το σπίτι σαν την άσκηση 7 του σχολικού βιβλίου

Η τιμή ισορροπίας ενός αγαθού είναι 100 ευρώ και η ποσότητα ισορροπίας 100 κιλά. Το εισόδημα των καταναλωτών 20.000 Ευρώ. Ύστερα από μια μεταβολή στο εισόδημα των καταναλωτών κατά 2.000 ευρώ, η τιμή ισορροπίας διαμορφώθηκε στα 120 ευρώ ενώ η ποσότητα ισορροπίας στα 120 κιλά.

- α) Αν το αγαθό είναι κανονικό, το εισόδημα αυξήθηκε ή μειώθηκε και γιατί;
- β) Να βρείτε τη συνάρτηση προσφοράς αν είναι γραμμικής μορφής.
- γ) Αν η εισοδηματική ελαστικότητα στο αρχικό σημείο ισορροπίας είναι ίση με 4 να βρεθεί η συνάρτηση ζήτησης με το νέο εισόδημα αν είναι γραμμικής μορφής.