

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Έστω ότι για μια γωνία ω , όπου $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, ισχύει ότι: $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{5}{13}$.

α. Να υπολογίσετε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$A = \frac{169 \cdot \eta\mu(3\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \omega\right)}{\sigma\varphi\left(\omega - \frac{9\pi}{2}\right) \cdot \sigma\varphi(13\pi + \omega)}$$

2. Έστω ότι για μια γωνία ω , όπου $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, ισχύει ότι: $\varepsilon\varphi(\pi + \omega) = \frac{5}{12}$.

α. Να υπολογίσετε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$A = \frac{169 \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega - 5\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2} - \omega\right)}{\varepsilon\varphi\left(\omega - \frac{5\pi}{2}\right) \cdot \varepsilon\varphi(18\pi + \omega)}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = k \cdot \eta\mu ax - 1$, $a, k > 0$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$ καθώς και ότι η μέγιστη τιμή της είναι το 3.

α. Να δείξετε ότι $k=4$ και $a=3$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, την οποία και να προσδιορίσετε.

γ. Να δείξετε ότι: $f(3\pi - x) + f(\pi - x) + f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 3 \cdot f(x)$

δ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ και $g(x) = 1 + \eta\mu 2x$.

α. Αν T_1 και T_2 είναι οι περίοδοί τους, να αποδείξετε ότι $T_1 + T_2 = 5\pi$ καθώς και ότι $g(4\pi) - f(8\pi) = 1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$, $x \in [0, 2\pi]$.

γ. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις τους για $x \in [0, 2\pi]$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \eta\mu^3 2x + \eta\mu^2 2x - 13 \cdot \eta\mu 2x + 6$.

α. Να αποδείξετε ότι: $f(\pi + x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

β. Να βρείτε την τιμή του $\eta\mu 2x$ για την οποία ισχύει $f(x)=0$.

γ. Να βρείτε σε ποια σημεία του διαστήματος $[0, \pi]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον οριζόντιο άξονα.

6. Α. Να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα:

$$(2a-1)x + (a+1)y = 5-a$$

$$(a-1)x - (1-a)y = 1$$

Β. Να βρείτε - αν υπάρχει - τιμή του a για την οποία το σύστημα έχει λύση το ζευγάρι $(-3,2)$. Κάντε ανάλογο έλεγχο για το ζευγάρι $(2,-1)$.

7. Έστω D, D_x, D_y οι ορίζουσες ενός συστήματος το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) .

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις:

$$3D_x - 4D_y = D$$

$$D_x + 2D_y = 2D \quad \text{και} \quad \eta\mu(3x_0 \cdot \omega) = -\sigma\upsilon\nu(2y_0 \cdot \omega)$$

Να υπολογίσετε τη λύση (x_0, y_0) καθώς και τη γωνία ω .

8. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^3 - 3ax + 2 - a$ και $Q(x) = 3x^3 + (a-1)x + 2$

α. Αν το $(x+1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το (x^2-2) .

β. Να βρείτε τα a, β ώστε το πολυώνυμο: $H(x) = x^3 + P(x) - Q(x) + \beta$, να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

γ. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία το πολυώνυμο: $K(x) = Q(x) - 2$, έχει παράγοντα τον όρο $(x-a+1)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \left(\frac{1 - \ln a}{\ln a} \right)^x$

α. Να περιορίσετε κατάλληλα το a , ώστε η συνάρτηση να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα.

γ. Αν $a = \sqrt[3]{e}$, να λύσετε την ανίσωση: $f(2x^3 - 3x) \leq f(x^3 + 4x - 6)$

10. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x + \ln(e^x - 3)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $f(\ln 4), f(\ln 5)$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2)$

11. Έστω ότι το πολυώνυμο: $P(x) = (\ln a) \cdot x^3 + (2 - \ln a) \cdot x^2 + a^{\ln \beta} \cdot x + 1$ έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές και αρνητική ακέραια ρίζα.

α. Να υπολογίσετε τα a και β .

β. Για $a=e$ και $\beta=1$, να λύσετε την ανίσωση: $P(e^x) < e^x + 3$

12. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (2\ln k - 1)x^4 + x^3 + (e-1)x^2 - ex + 1 + 2\eta\mu\theta, \quad \mu\epsilon \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad k > 0.$$

α. Αν το πολυώνυμο είναι 3^{ου} βαθμού και έχει παράγοντα την ποσότητα $(x-1)$, να υπολογίσετε τις τιμές των k και θ .

β. Για τις τιμές των k και θ που υπολογίσατε στο (α) ερώτημα, να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 0$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $e^{3x} + (e-1)e^{2x} - e^{x+1} < 0$

13. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ γνωρίζουμε ότι είναι τουλάχιστον δευτέρου βαθμού και πως διαιρούμενο με $(x+1)$ αφήνει υπόλοιπο (-2) , ενώ διαιρούμενο με $(x+2)$ αφήνει υπόλοιπο (-1) , να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο (x^2+3x+2) .
14. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 5x^2 + \beta x + a + 1$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι έχει παράγοντα το $(2x^2+3)$, να υπολογίσετε τα a, β και να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.
15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 7x^3 + ax^2 + \beta x - 12$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το (x^2-1) . Να βρείτε τις τιμές των a, β και να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.
16. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + \beta$, $Q(x) = x^2 - x - 2$.
Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $Q(x)$, να βρείτε τις τιμές των a, β και να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.
17. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
i. $2 + \sqrt{3x+1} = \sqrt{7x+1}$ ii. $\sqrt{22-2x} = 2 + \sqrt{10-x}$ iii. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = 5$
iv. $2x^2 = \sqrt{2x^2 - 5x + 1} + 5x + 1$ v. $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{5}{2}$
18. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} \geq 1$.
19. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \log\left(\frac{3-x}{x+3}\right) + x$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι:
i. Είναι περιττή
ii. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) - f(-x) = 2x$.
20. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = (\ln a - 2)^x$, $x \in \mathbb{R}$.
α. Για ποιες τιμές του a ορίζεται η συνάρτηση;
β. Για ποιες τιμές του a , η συνάρτηση γίνεται γνήσια φθίνουσα;
γ. Για $a = e^{\frac{5}{2}}$, να λυθεί η ανίσωση: $f(\ln x) < f(1)$.
21. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:
i. $3^x + 3 \leq 4\sqrt{3^x}$ ii. $4^{2\sin^2 x - 1} + 4^{\sin^2 x} = 3$ iii. $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$
22. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:
i. $10 \cdot x^{\log x} = x^2 \cdot \sqrt{x}$ ii. $\ln^3 x - 6\ln^2 x + 11\ln x - 6 = 0$
iii. $2^{\ln x} + 2^{2-\ln x} = 5$ iv. $\log(1+x^2) + \log(x-5) > \log(x^2 - 10x + 1)$
23. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x} + 2$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση: $f^2(x) - 2 = 4 \cdot \frac{2^x}{3^x}$.
24. Να λύσετε τα συστήματα: $\left\{ \begin{array}{l} \log\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \\ \log x \cdot \log(xy) = 2 \end{array} \right\}$ και $\left\{ \begin{array}{l} x^{\log y} = 2 \\ x \cdot y = 20 \end{array} \right\}$
25. Να λύσετε τις ανισώσεις :
1. $\frac{3 \cdot 2^x - 1}{2 \cdot 4^x} > 1$ 2. $\frac{6 - \left(\frac{1}{3}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1} > \frac{1}{2 \cdot 3^x}$ 3. $3 \cdot 8^x - 3 \cdot 12^x + 2 \cdot 18^x > 2 \cdot 27^x$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $\ln(e^x + 2^x) = x + \ln 3$ 2. $25^{\ln x} - 4 \cdot x^{\ln 5} + 3 = 0$ 3. $x^{\ln x^3} = e^2 \cdot x$
4. $\log 5^x = x$ 5. $2^{2x} \cdot 3^x + 2 \cdot 12^x = 9 \cdot 6^x$

27. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \ln(3^x - 6)$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες .
3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της είναι κάτω από τον xx' .

28. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 0$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = 0$.

29. Ε. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \sqrt{10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{9}\right)^x} - 9$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να λυθεί η ανίσωση: $f^2(\ln x) > 0$

30. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \left(\frac{1}{\ln a} - 1\right)^x$

A. Να βρείτε την τιμή του a ώστε η f να έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

B. Να βρείτε για ποιες τιμές του a , η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα.

Γ. Για $a = e^{\frac{1}{3}}$, να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln \sqrt{x}) > f(\ln^2 x)$

31. Να υπολογίσετε τις τιμές των α, β, γ όπου:

A. $\alpha = e^{\ln 5} - 10^{2 \log \sqrt{3}}$, $\beta = e^{\ln 10 - 2 \ln \sqrt{2}}$, $\gamma = 10^{1 - \log 5}$

B. Για τις τιμές των α, β, γ που βρήκατε παραπάνω να λύσετε την ανίσωση:

$$\alpha \cdot \ln^2 x - \beta \cdot \ln x^2 + 6\gamma < 0$$

32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^{\ln^2 x} = \frac{x^3}{e^2}$

ii) $x^{\ln x} = e^3 \cdot x^2$

iii) $\sqrt{x^{\ln \sqrt{x}}} = e$

33. A. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (a^2 - a)^x$.

B. Για ποιες από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι

α) γνησίως αύξουσα β) γνησίως φθίνουσα

Γ. Για $a = -\frac{1}{2}$, να λυθεί η ανίσωση: $f(2x - 1) \leq \frac{27}{64}$

34. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1-5a}{a+1}\right)^x$

α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι:

i) γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ ii) γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Για $\alpha = -\frac{1}{5}$, να λύσετε την ανίσωση: $2f(2x) - 7f(x) + 5 \leq 0$

35. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = a + \ln(e^x - 2)$, $a \in \mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση περνά από το σημείο $A(\ln 3, 1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι $a=1$.

γ. Να συγκρίνετε τα $f(\ln 5)$, $f(\ln 8)$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

36. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \ln(9^x - 3^x \cdot e^x)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι $f(1)<0$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2x + \ln 2$.

37. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x)+f(-x)=0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) - f(-x) = \ln(x^2 + x + 1)^2$.

38. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = (2 - \ln \alpha)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ορίζεται η συνάρτηση.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα.

γ. Για $\alpha = \sqrt{e}$, να λύσετε την ανίσωση: $f(3^{-x}) > f(9^{-x})$.

39. Αν για τις γωνίες α και β γνωρίζουμε ότι:

$\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{12}{13}$ όπου $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, τότε:

α. Να υπολογίσετε τα $\eta\mu(\alpha+\beta)$ και $\epsilon\varphi(\alpha+\beta)$

β. Να υπολογίσετε τα $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$ και $\sigma\varphi(\alpha-\beta)$.

40. α. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}$

β. Να υπολογίσετε την $\epsilon\varphi 75^\circ$.

41. Αν για την γωνία α γνωρίζουμε ότι: $\eta\mu\alpha = -\frac{3}{5}$, όπου $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ να υπολογίσετε :

α. Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου 2α.

β. Να υπολογίσετε τα $\eta\mu 3\alpha$ και $\sigma\upsilon\nu 4\alpha$.

42. α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x} = \epsilon\varphi x$

β. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x} = \epsilon\varphi x$

γ. Αν $0 < x < \pi/2$, να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(\frac{1 + \eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x} \right)^2 + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x} - 2 = 0$$

43. α. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 15° .

β. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 105° .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$1. \alpha. \eta\mu\omega = -\frac{12}{13}, \epsilon\phi\omega = \frac{12}{5}, \sigma\phi\omega = \frac{5}{12} \quad \beta. A = \frac{169 \cdot \eta\mu\omega \cdot (-\sigma\upsilon\nu\omega)}{-\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega} = \dots = 60$$

$$2. \alpha. \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}, \eta\mu\omega = -\frac{5}{13}, \sigma\phi\omega = \frac{12}{5} \quad \beta. A = \frac{169 \cdot (-\sigma\upsilon\nu\omega) \cdot (-\eta\mu\omega)}{-\sigma\phi\omega \cdot \epsilon\phi\omega} = \dots = -60$$

$$3. \alpha. \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = 3, k\eta\mu 3\chi - 1 \leq 3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow k = 4 \quad \beta. \max \alpha\upsilon\chi = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ και } \min \text{ για } \chi = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \text{ ή } \chi = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \min f = -5 \quad \gamma. f(3\pi - \chi) = f(\pi - \chi) = f\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right)$$

$$4. \alpha. T_1 = 4\pi, T_2 = \pi, g(4\pi) - f(8\pi) = 1 - 0 = 1 \quad \beta. \eta\mu 2\chi = -\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\chi}{2}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\chi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \chi = \frac{4\kappa\pi - \pi}{3} \text{ ή } \chi = \frac{4\kappa\pi + 3\pi}{5}, \text{ δεκτές οι } \chi = \pi, \chi = \frac{3\pi}{5}, \chi = \frac{7\pi}{5}$$

$$5. \alpha. \eta\mu(2\pi + 2\chi) = \eta\mu 2\chi, \eta\mu(\pi - 2\chi) = \eta\mu 2\chi \quad \beta. \text{ Ρίζες τα } \frac{1}{2}, 2, -3. \text{ Δεκτή } \eta\mu 2\chi = \frac{1}{2} \\ \gamma. \eta\mu 2\chi = 0,5 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi = \frac{\pi}{12} \text{ ή } \chi = \frac{5\pi}{12}$$

$$\alpha. D = (a-1)(a-2), D_x = -(a-2)(a-3), D_y = (a-2)^2, \text{ άρα: Αν } a = 2, \text{ έχει άπειρες λύσεις} \\ 6. \text{ αν } a = 1 \text{ είναι αδύνατο, ενώ αν } a \neq 2 \text{ και } a \neq 1 \text{ είναι } \chi = -\frac{a-3}{a-1}, \gamma = \frac{a-2}{a-1}. \\ \beta. \text{ Όχι, δεν είναι λύσεις.}$$

$$7. x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{2} \text{ και } \eta\mu 3\omega = -\sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} + \omega\right) \Leftrightarrow \omega = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \text{ ή } \omega = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$$

$$8. \alpha. a = 0, v = 5x + 2 \quad \beta. a = \beta = \frac{1}{4} \quad \gamma. a = 1 \text{ ή } a = \frac{2}{3}$$

$$9. \alpha. \text{ πρέπει } a \in (1, \sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, e) \quad \beta. a \in (1, \sqrt{e}) \quad \gamma. x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$$

$$10. \alpha. x \in (\ln 3, +\infty) \quad \beta. f(\ln 4) = \ln 4, f(\ln 5) = \ln 5 + \ln 2 = \ln 10 \quad \gamma. \ln(e^{2x} - 3e^x) > \ln(2e^x - 6) \\ \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < \ln 2 \text{ ή } x > \ln 3, \text{ δεκτή η } x > \ln 3.$$

$$11. \beta. e^{3x} + e^{2x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$12. \alpha. k = \sqrt{e}, 1 + 2\eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{6}, \theta = \frac{11\pi}{6} \quad \beta. x(x-1)(x+e) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -e) \cup (0, 1) \\ \gamma. e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

13. $v(x) = -x - 3$

14. $\alpha = 2, \beta = 3, P(x) = (2x^2 + 3)(x^2 + x + 1) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. $\alpha = 11, \beta = 7, (x^2 - 1)(x^2 - 7x + 12) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (4, +\infty)$

16. $\alpha = -7, \beta = -2, (x^2 - x - 2)(2x - 1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

17. i. $x = 5$ ii. $x = -4\sqrt{6}$ iii. $x = 6$ iv. $x = 3, x = -\frac{1}{2}$ v. $x = \frac{2}{3}, x = \frac{7}{3}$

18. $x \in (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$

19. $\alpha. x \in (-3, 3)$ και $f(-x) = -f(x)$ $\beta. x = 0$

20. $\alpha. a \in (e^2, e^3) \cup (e^3, +\infty)$ $\beta. a \in (e^2, e^3)$ $\gamma. x > e$

21. i. $x \in [0, 2]$ ii. $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$ iii. $x = 1$ ή $x = -1$

22. i. $x = 100, x = \sqrt{10}$ ii. $x = e, x = e^2, x = e^3$ iii. $x = 1, x = e^2$ iv. $x \in (5, +\infty)$

23. $A_f = (-\infty, 0] \cup [1/2, +\infty)$, $x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$, η οποία είναι δεκτή.

24. i. $x = 100, y = \frac{1}{10}$

25. i. $\frac{1}{2} < 2^x < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ ii. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

iii. Διαίρω με $3^{3x}, \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Leftrightarrow x < 0$

26. i. $x = \frac{\ln 2}{\ln 2 - 1}$ ii. $x = 0, x = \frac{\ln 3}{\ln 5}$ iii. $x = e, x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ iv. $x = 0$ v. $x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$

27. i. $A_f = \left(\frac{\ln 6}{\ln 3}, +\infty\right)$ ii. $A\left(\frac{\ln 7}{\ln 3}, 0\right)$ iii. $x \in \left(\frac{\ln 6}{\ln 3}, \frac{\ln 7}{\ln 3}\right)$

28. i. $A_f = (-3, 3)$ ii. προφανές iii. $x = 0$

29. i. $A_f = (-2, 0)$ ii. $x \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$

30. Α. $a \in (1, \sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, e)$ Β. $a \in (1, \sqrt{e})$ Γ. $f(x) = 2^x, 2 \ln^2 x - \ln x < 0 \Leftrightarrow x \in (1, \sqrt{e})$

31. Α. $a = 2, \beta = 5, \gamma = 2$ Β. $2 < \ln x < 3 \Leftrightarrow e^2 < x < e^3$

32. i. $x = e$ ή $x = \frac{1}{e^2}$ ii. $x = \frac{1}{e}$ ή $x = e^3$ iii. $x = e^2$ ή $x = \frac{1}{e^2}$

33. i. $a \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$
 ii. f γνήσια αύξουσα αν $a \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ iii. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Leftrightarrow x \geq 2$

34. α. $a \in (-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{5}\right)$ β. $f \nearrow$ αν $a \in (-1, 0)$ γ. $0 < x < 1$

α. $x \in (\ln 2, +\infty)$ β. $1 = a + \ln 1, a = 1$ γ. $f(\ln 5) = 1 + \ln 3 < f(\ln 8) = 1 + \ln 6$
 35. δ. $x = \ln\left(2 + \frac{1}{e}\right)$, δεκτή.

α. Αφού $9^x > (3e)^x, A_f = \mathbb{R}$ β. Ισχύει γιατί $0 < 9 - 3e < 1$
 36. γ. $9^x - 3^x e^x \geq 2e^{2x} \Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 2}{\ln 3 - 1}$

37. α. $A_f = (-2, 2)$ γ. $x = 0$

38. α. $a \in (0, 1) \cup (1, e^2)$ β. $x \in (0, 1)$ γ. $\left(\frac{3}{2}\right)^{3-x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{9-x} \Leftrightarrow 3^{-x} > 3^{-2x} \Leftrightarrow x > 0$

39. α. $\eta\mu(\alpha + \beta) = -\frac{33}{65}, \epsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{33}{56}$ β. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = -\frac{16}{65}, \sigma\varphi(\alpha - \beta) = \frac{16}{63}$.

40. $\epsilon\varphi 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

41. α. $\eta\mu 2\alpha = \frac{24}{25}, \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{7}{25}, \epsilon\varphi 2\alpha = \frac{24}{7}$ β. $\eta\mu 3\alpha = -\frac{117}{125}, \sigma\upsilon\nu 4\alpha = -\frac{527}{625}$

42. Στην τελευταία εξίσωση θέτω $\psi = \epsilon\varphi x$ και προκύπτει μόνη δεκτή ρίζα η $x = \pi/4$.