

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot 4^{x+1} - 2 \cdot 2^x - 1 = 0$ (1)
Η ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$. Επίσης το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 3.
Να βρείτε :
α) τους αριθμούς a και b β) τις άλλες ρίζες του $P(x)$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x^2 - 8x + 17)$
Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .
Να αποδείξετε ότι $f(2) = f(1) - \log 2$
Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq f(2)$.
3. Για ποιες τιμές του $\theta \in \mathbb{R}$ η ανίσωση : $x^2 - 2(1 + \log \theta)x + 5 - \log^2 \theta \geq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$;
4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \eta \mu^2 \theta x^3 - 2x + 2\eta \mu \theta - 1$.
Να βρείτε το $\theta \in [\pi, 2\pi]$ ώστε η $P(x) : (x+1)$ να δίνει υπόλοιπο $u = 1$
5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + \ln(e^x - 3)$.
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 4)$ και $f(\ln 5)$
Να λύσετε την ανισότητα $f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2)$
6. Δίνεται το πολυώνυμο:
 $P(x) = -x^4 + (\sin \theta - \eta \mu \theta)x^3 + (\sigma \nu \theta - \eta \mu^2 \theta)x + (\eta \mu \theta, \theta \in (0, \pi))$.
α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 να βρείτε το θ
β) Για $\theta = \frac{\pi}{2}$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
7. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού για το οποίο ισχύει η σχέση:
 $(x-\pi) \cdot P(\sin x) - 2xP(\eta \mu x) = x - 2\pi$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (1).
α. Να υπολογίσετε τα $P(0)$ και $P(1)$.
β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - x$.
γ. Αν το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης είναι το $3x - 1$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3x^2 - x$

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4\eta\mu\alpha \cdot x^3 + 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot x^2 - 8x + 3$.
Αν το $P(x)$ έχει για παράγοντα το $Q(x) = x - \eta\mu\alpha$ να βρείτε τη γωνία α αν γνωρίζουμε ότι $\alpha \in (-\pi, \pi)$.
9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$, βαθμού $\nu \geq 2$, για το οποίο ισχύει :
 $8(x-1) \cdot P(x) - x \cdot P(2x+3) = -52x^3 - 8x^2 - 6x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι 2:
 ι. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - 6x + 5$.
 ιι. Αν το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - 6x + 5$ είναι το $\Pi(x) = x + 4$:
 α) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$:
 i. με τον άξονα $y'y$.
 ii. με την ευθεία $y=2$
 β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $y=2$.
10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = k + \log(x^2 - 3)$, $k \in \mathbb{R}$.
 1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 2. Να υπολογίσετε την τιμή του k ώστε $f(2) = \log 100$.
 3. Για $k=2$:
 α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης την με την
 ευθεία : $y = -\log \frac{1}{1000}$
 β) Να λυθεί η ανίσωση : $f(x) > 2$.
11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \ln(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot x^2 - \ln(1 + 2\eta\mu\alpha \times \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot x - 8$,
 όπου $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
 ι. Να αποδείξετε ότι το 2 είναι ρίζα του $P(x)$.
 ιι. Αν $\alpha = \frac{\pi}{2}$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα.

β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(2) = 4$,

i. Να υπολογίσετε το a .

ii. Για $a = 2$ να λύσετε την ανίσωση $f(x+1) < 8$

13. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (2\ln\theta - 1)x^4 + x^3 - x^2 + x - 2\sin\varphi, \theta > 0, \varphi \in (0, \pi), x \in \mathbb{R}.$$

A. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού και έχει παράγοντα το $x-1$, να βρεθούν τα θ, φ

B. Αν $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1, x \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές του $X \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $P(x) < 0$.

Γ. Να λυθούν:

I) η εξίσωση $P(\sqrt{2}\eta\mu\omega) = 0$, όταν $\omega \in (0, \pi)$.

II) η ανίσωση $P(2 + \ln\alpha) < 0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$.

1. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f .

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x \cdot (\ln x + 1)$.

3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2f\left(\frac{1}{e}\right)$.

4. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > f(e)$.

15. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να αποδείξετε ότι $10^{f(1)} + 2 \cdot 10^{f(3)} + f(\log 101) = 2009$

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x) = f(x) + \log 11$.

16. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 5\eta\mu\theta x^2 - 2x + 2\sin^2\theta$ με $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ έχει παράγοντα το $x - \eta\phi\frac{\pi}{4}$.

α) Να βρείτε το θ

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

17. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (4^\lambda + 1)x + 2^\lambda x + 8^\lambda$ έχει παράγοντα το $x+1$.

α) Να βρείτε το λ .

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$

γ) Αν $P(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-4$, να λύσετε την εξίσωση $\pi(\sin \theta) = 2\eta \mu^2 \theta$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ax + \ln 2} - 2$.

α) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Αν ισχύει $f(1) = -\frac{3}{2}$, να βρείτε την τιμή του a .

γ) Για $a = -\ln 4$:

ι) ναδειχθεί ότι $f(x)2^{1-2x} - 2$

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = -3 \cdot 2^{-x}$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+a)$ για την οποία ισχύει

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ln 2 = 0$$

α) Να βρείτε την τιμή του a .

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

γ) Να βρείτε την γωνία $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ για την οποία ισχύει:

$$\ln(\sin \omega) + f\left(\frac{\pi}{12}\right) = f\left(-\frac{\pi}{24}\right)$$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $\eta \mu(e^{f(x)}) \sin(e^{f(x)}) = \frac{1}{2}$

20. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (3 + \log a)x^2 + (5 - \log b)x - \log 4$.

έχει παράγοντα το $x^2 - 3x + 2$.

α) Να βρείτε τα a, b

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Αν ρ η μικρότερη ρίζα της $P(x) = 0$ να λύσετε την ανίσωση $3^x + 3^{1-x} \leq 100^\rho$

21. Το πολυώνυμο

$$P(x) = (4^{\lambda + \frac{1}{2}} - 12 \cdot 2^{\lambda - 1} + 1)x^4 - (\lambda + 1)x^3 + (1 + \log a)x^2 - (2 + \log a^3)x - 6$$

είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το $x + \lambda$.

α) Να δειχθεί ότι $\lambda = -2$.

β) Να βρείτε το a .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

22. Δίνεται η εξίσωση $2\alpha\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi+2\beta\sigma\upsilon\nu^2\chi=\beta+\gamma$

όπου α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{\pi}{2}$.

i) Να δείχθεί ότι $\alpha=\gamma=-\beta$.

ii) Αν ο αριθμός π δεν είναι λύση της δοθείσας εξίσωσης να λύσετε την εξίσωση.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu^3\chi+2\sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu^3\chi+1$

i) Να δείξετε ότι $f(x)=(\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi)^2$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)x+1$ όπου $\alpha\in(0, \frac{\pi}{2})$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$

25. Για κάποια γωνία $\alpha\in(0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει η σχέση $\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=-\frac{7}{8}$.

i) Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\alpha$.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\epsilon\phi^2\alpha \sigma\upsilon\nu\chi$

iii) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

26. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^{100}+\alpha x+\beta$ με $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha+\beta=-1$.

β) Να βρείτε τους α, β ώστε το πολυώνυμο να διαιρείται με το $(x-1)^2$

γ) Για $\alpha=-100$ και $\beta=99$ να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-1)^2$

27. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το x δίνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενο με το $x-\alpha$ δίνει πηλίκο x^2+5x .

i) Να δείξετε ότι $P(\alpha)=2$

ii) Να δείξετε ότι $P(x)=x^3+(5-\alpha)x^2-5\alpha x+2$

iii) Αν επιπλέον το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-\beta$ δίνει πηλίκο x^2+x-8 , τότε:

α) Να δείξετε ότι $P(\beta)=2-8\beta$

β) Να βρείτε τα α, β

γ) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$

28. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (a-2)x^2 + (3-2a)x - 2b$ με $a, b \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 2.
 ι) Να βρείτε το b
 ιι) Αν επιπλέον το $P(x)$ έχει ρίζες $\rho_1 < 2 < \rho_2$ και $\rho_1 + \rho_2 = 4$, τότε:
 α) Να βρείτε το a .
 β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
29. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + \eta\mu\beta x + 2 + \sigma\upsilon\nu\beta$ το οποίο έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές.
 ι) Να δείξετε ότι $P(0) = 2$
 ιι) Να δείξετε ότι $P(-3)P(-4)P(-5) \neq 0$
 ιiii) Αν η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ακέραια ρίζα ρ , τότε:
 α) να βρείτε το ρ και το a
 β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
30. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 ι) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$. Τότε ισχύει η ισότητα;
 ιι) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 2$.
31. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\ln a + 5)x^2 + (5\ln a + 6)x - 6\ln a$, με $a > 0$
 ι) Να δείχθεί ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$
 ιι) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x)$: $(x - 2)$
 ιiii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
 iv) Να βρείτε την τιμή του a ώστε $P(1) = 0$
32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\log x + 1}{\log x - 1}$
 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(100)$ και $f(1000)$.
 γ) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_2, x_1 \in A_f$ τότε $x_2 = x_1$
 δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(4x - 20) = 3$
33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln \sqrt{2^{x-1}}$
 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 2$.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.