

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + (\mu - 1)x^2 + 2x + 3$ με ακεραίους συντελεστές. Το πολυώνυμο έχει μια αρνητική ακέραια ρίζα ρ με $|\rho| \neq 3$, ενώ διαιρούμενο με $x-1$ αφήνει υπόλοιπο 6.

Γ1) Να βρείτε τους ακεραίους λ και μ (10 μονάδες)

Γ2) Αν $\lambda = \mu = 1$ τότε:

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ (5 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $P(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (5 μονάδες)

γ) Σε ποιο διάστημα η C_P βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'Ox$; (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{3^x - 9}{1 - 3^{x+2}}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-2, 2)$

(10 μονάδες)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x \ln 3 = 0$ (5 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή στο A (5 μονάδες)

δ) Να δείξετε ότι τα τόξα $\frac{2\pi}{7} + \theta$ και $\frac{5\pi}{7} - \theta$ είναι παραπληρωματικά και ισχύει

$$f\left(\sin\left(\frac{2\pi}{7} + \theta\right)\right) + f\left(\sin\left(\frac{5\pi}{7} - \theta\right)\right) = 0 \quad (5 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο P με

$$P(x) = \left(\eta \mu \theta + \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \right) x^{2004} + x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 6 :$$

B1) αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού τότε να βρεθεί το $\theta \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

B2) αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού δηλαδή

$$P(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 6 \quad \text{με } x-1, \quad x-3 \text{ παράγοντες τότε}$$

α. Να βρεθούν τα α, β

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το γραμμικό σύστημα (2x2):

$$\begin{cases} \ln \alpha \cdot x + (e^{\alpha-1} - 1) y = 2015 \\ -2x + y = 2016 \cdot 2017 \end{cases}$$

με $\alpha > 0$ και αγνώστους $x, y \in \mathbb{R}$

Επίσης δίνεται η περιττή συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Δ1) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση εκτός από μια τιμή του α , όπου $\alpha > 0$ (πλήρης αιτιολόγηση)

Μονάδες 6

Δ2) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(\ln x + 2e^{x-1} - 2)$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 4

Δ3) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < \ln(2\ln^2 x + 2e^{x-1} - 2)$ με $x > 1$ όπου f είναι η συνάρτηση του Δ2 ερωτήματος

Μονάδες 7

Δ4) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^{2x} - 2e) = \ln(g(0)f(x) + (2e-1)e^x)$

Μονάδες 8

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 4

Δ3) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < \ln(2\ln^2 x + 2e^{x-1} - 2)$ με $x > 1$ όπου f είναι η συνάρτηση του Δ2 ερωτήματος

Μονάδες 7

Δ4) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^{2x} - 2e) = \ln(g(0)f(x) + (2e-1)e^x)$

Μονάδες 8

