

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(3 - \sqrt{e^x + 3}).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \log(5^x + x - 1) + x \log 2.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A = (0, +\infty)$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 26 + 2 \log 2$.
- iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = x$.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \varepsilon \varphi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad g(x) = (x-1) \ln x, \quad x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

ii) $\eta \mu^2 x < \sigma \nu^2 x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

iii) η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

iv) $\sigma \nu^2 x \cdot \ln(\eta \mu x) < \eta \mu^2 x \ln(\sigma \nu x)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{3^x - 2}{3^x - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln \left(\frac{2 \cdot 3^x - 3}{3^{2x} - 3^x} \right).$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο

$$A_g = (-\infty, 0) \cup \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right).$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e^{g(x)}$.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x \ln \sqrt{2^{x-1}}$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 2$.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 7x^3 - 2ax^2 - 3a \quad \text{με} \quad a \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x - 3$.

- i) Να αποδείξετε ότι $a = 9$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{(\ln^2 x + 2)^3}{2(\ln^2 x + 2)^2 + 3} = \frac{9}{7}.$$