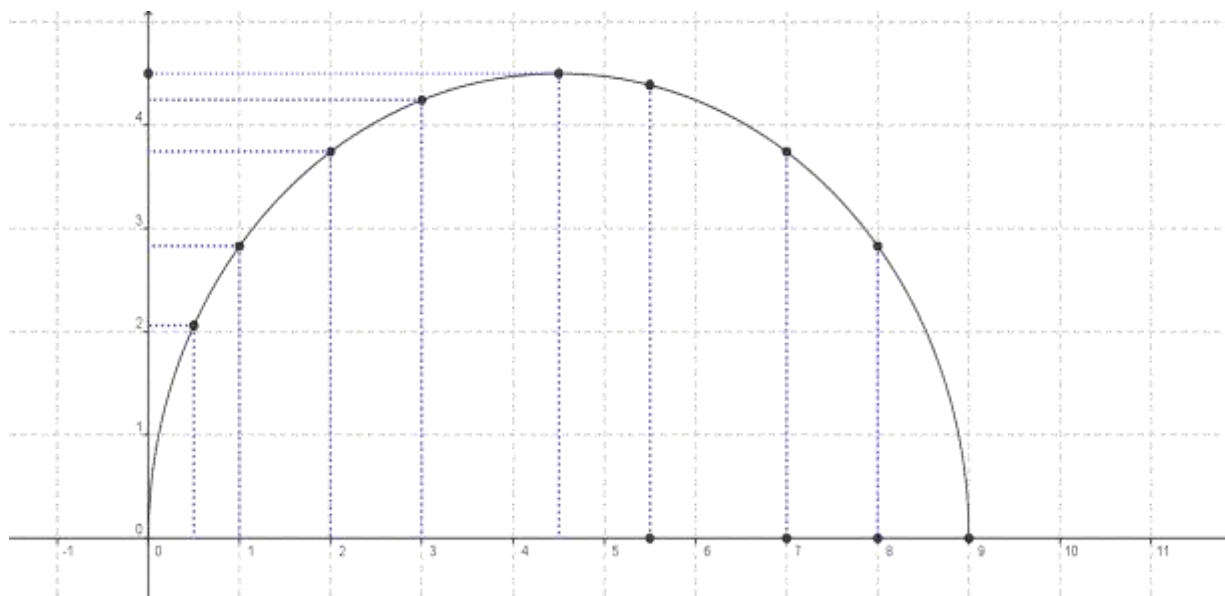


Ιδιότητες Συναρτήσεων

- Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης f

Δραστηριότητα 1^η

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f



- Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού
- Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών.....
- Να διατάξετε τις τιμές της συνάρτησης : $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4.5)$
.....<.....<.....<.....<.....
- Να διατάξετε τις τιμές της συνάρτησης : $f(5.5)$, $f(7)$, $f(8)$.
.....<.....<.....
- Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f ;

Να εξάγετε συμπεράσματα

$$\text{Για } x_1, x_2 \in \Delta = \left[0, \frac{9}{2}\right] \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \dots\dots\dots f(x_2)$$

$$x_1, x_2 \in \Delta = \left[\frac{9}{2}, 9\right] \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \dots\dots\dots f(x_2)$$

$$\text{Για κάθε } x \in [0, 9] \text{ ισχύει } f(x) \leq f(\dots\dots\dots)$$

Να γενικεύσετε τον κανόνα :

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν :

Για $x_1, x_2 \in \Delta$ με ισχύει

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν :

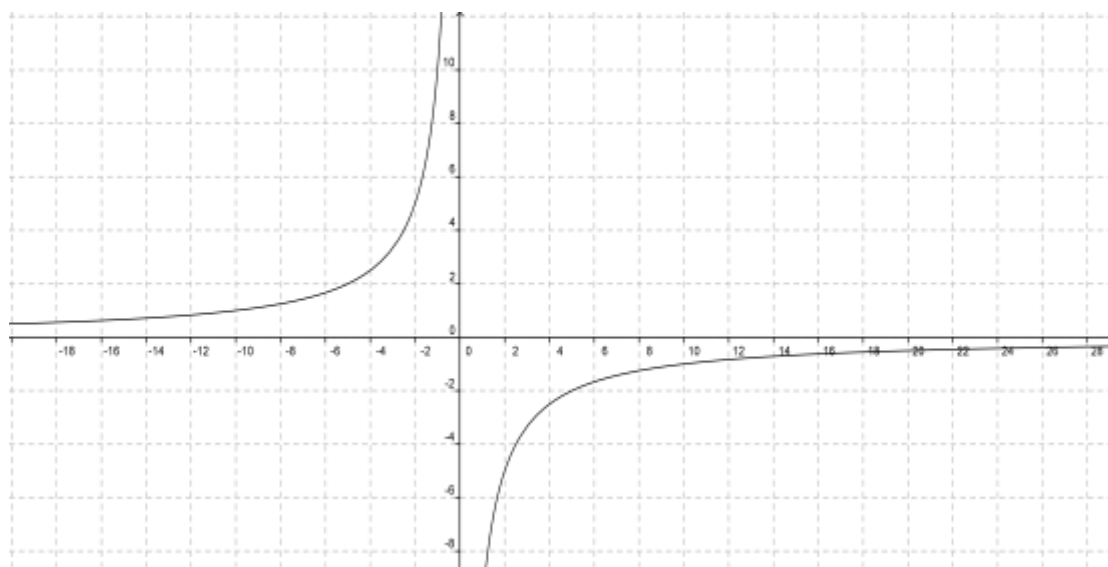
Για $x_1, x_2 \in \Delta$ με ισχύει

Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A **στη θέση** $x = x_0 \in A$ παρουσιάζει (ολικό) **μέγιστο** $f(x_0)$ αν ισχύειγια

Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A **στη θέση** $x = x_0 \in A$ παρουσιάζει (ολικό) **ελάχιστο** $f(x_0)$ αν ισχύειγια

Δραστηριότητα 2^η

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = -\frac{10}{x}$ και η γραφική της παράσταση :



- Απο την γραφική παράσταση της συνάρτησης , ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τη μονοτονία της ;

Για κάθε $x_1, x_2 \in A_g = \dots\dots\dots$ η συνάρτηση g είναι

- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (αλγεβρική απόδειξη)

Για $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}^*$ με $\chi_1 < \chi_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\chi_1} \dots\dots\dots \frac{1}{\chi_2}$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{\chi_1} \dots\dots\dots -\frac{10}{\chi_2}$$

$$\Rightarrow g(\chi_1) \dots\dots\dots g(\chi_2)$$

****Παρατήρηση**

Όταν $\chi \rightarrow +\infty$ τότε $\psi \rightarrow \dots\dots\dots$ και όταν $\chi \rightarrow -\infty$ τότε $\psi \rightarrow \dots\dots\dots$

Η ευθεία $\psi = \dots\dots\dots$ ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $\dots\dots\dots$ και στο $\dots\dots\dots$

Δραστηριότητα 3^η

Πως θα υπολογίσω αλγεβρικά τα ακρότατα μίας συναρτησης ;

Δίνεται $f(\chi) = -2|\chi + 1| + 3$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

$$|\chi + 1| \geq \dots\dots\dots, \chi \in \mathbb{R}$$

$$-2|\chi + 1| \dots\dots\dots, \chi \in \mathbb{R}$$

Είναι $-2|\chi + 1| + 3 \dots\dots\dots, \chi \in \mathbb{R}$

$$f(\chi) \geq f(3), \chi \in \mathbb{R}$$

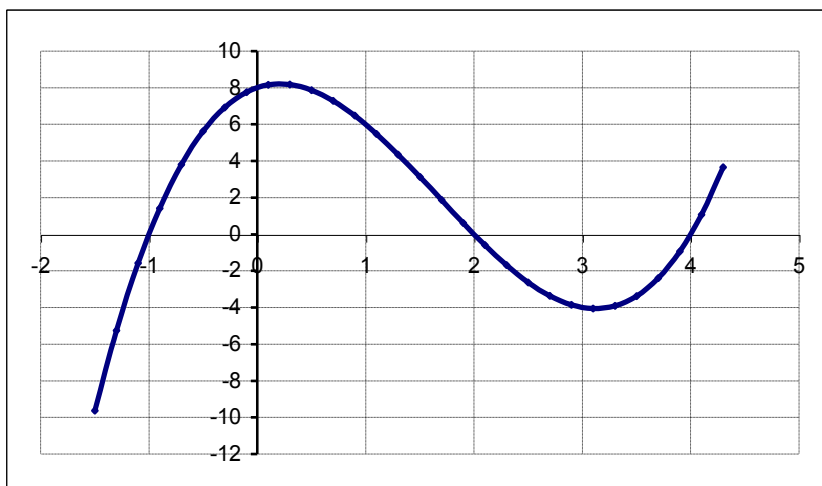
Άρα $\dots\dots\dots$

Δραστηριότητα 4^η

Με αλγεβρική μέθοδο να μελετηθεί η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(\chi) = (\chi - 2)^2 + 1$$

για $\chi_1, \chi_2 \in (-\infty, 2)$ με $\chi_1 < \chi_2$	Για $\chi_1, \chi_2 \in (2, +\infty)$ με $\chi_1 < \chi_2$
$\chi_1 - 2 \dots\dots\dots \chi_2 - 2$	$\chi_1 - 2 \dots\dots\dots \chi_2 - 2$
$(\chi_1 - 2)^2 \dots\dots\dots (\chi_2 - 2)^2$	$(\chi_1 - 2)^2 \dots\dots\dots (\chi_2 - 2)^2$
$(\chi_1 - 2)^2 + 1 \dots\dots\dots (\chi_2 - 2)^2 + 1$	$(\chi_1 - 2)^2 + 1 \dots\dots\dots (\chi_2 - 2)^2 + 1$
$f(\chi_1) \dots\dots\dots f(\chi_2)$	$f(\chi_1) \dots\dots\dots f(\chi_2)$

Δραστηριότητα 5^η

- Έχει πεδίο ορισμού $A=$
- Έχει σύνολο τιμών $f(A)$
- Να συμπληρώσετε το είδος της μονοτονίας της στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της

Στο διάστημα $\Delta_1=(\dots\dots\dots)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα

Στο διαστημα $\Delta_2=$ η συνάρτηση είναι.....

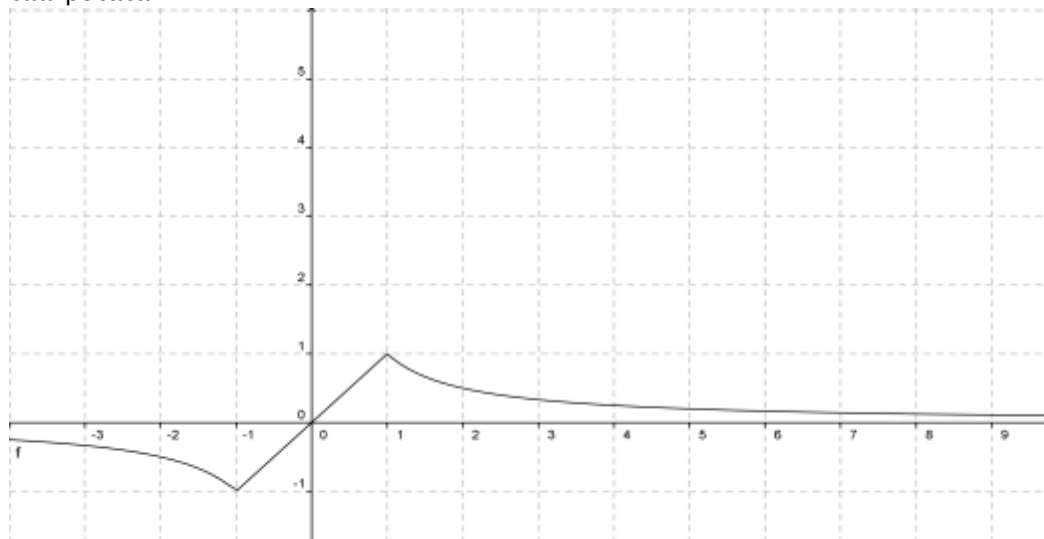
Στο διάστημα $\Delta_3=$

Για $x=0,5$ ισχύει $f(0,5)$ $f(x)$ γιακάθε $x \in f(A)$

Για $x=3$ ισχύει $f(3)=$ $f(x)$ γιακάθε $x \in f(A)$

*****Ασκήσεις για λύση_Προαιρετικά**

1.Απο την γραφική παράσταση της παρακάτω συνάρτησης να μελετήσετε τη μονοτονία και τακρότατα.



2. Μελέτη μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}, x \in (-\infty, 2)$

(Υπόδειξη : Λόγος μεταβολής $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Δικαιολογήστε ότι :

Αν $\lambda > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα, αν $\lambda < 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα)

3. Αν μία συνάρτηση ορίζεται σε ένωση δύο διαστημάτων π.χ

$$f(x) = 2x - 3|x - 2| = \begin{cases} -x + 6, & x \geq 2 \\ 5x - 6, & x < 2 \end{cases} \text{ τότε εξετάζω τη μονοτονία χωριστά σε κάθε}$$

διάστημα. Είναι λάθος να γράψω ότι είναι γνησίως μονότονη στο $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

4. Μονοτονία και ανισώσεις

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,3) και B(2,-5).

α) Το είδος της μονοτονίας της.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 3) < 3$

5. Συναρτησιακές σχέσεις

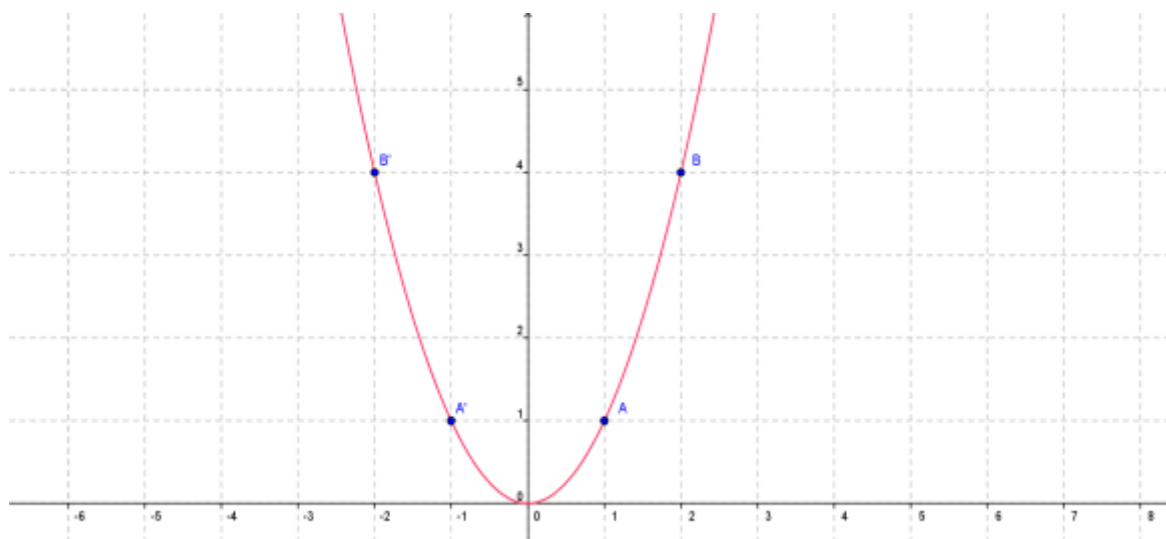
A. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ τότε να δείξετε ότι $g(x) = -f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

B. . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε να

δείξετε ότι $g(x) = \frac{3}{f(x)} - 2f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Γ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και ισχύει $f(x) > 0$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R και ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in R$. Τότε να δείξετε ότι η $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

- Συνάρτηση άρτια –περιττή

Δραστηριότητα 1^η

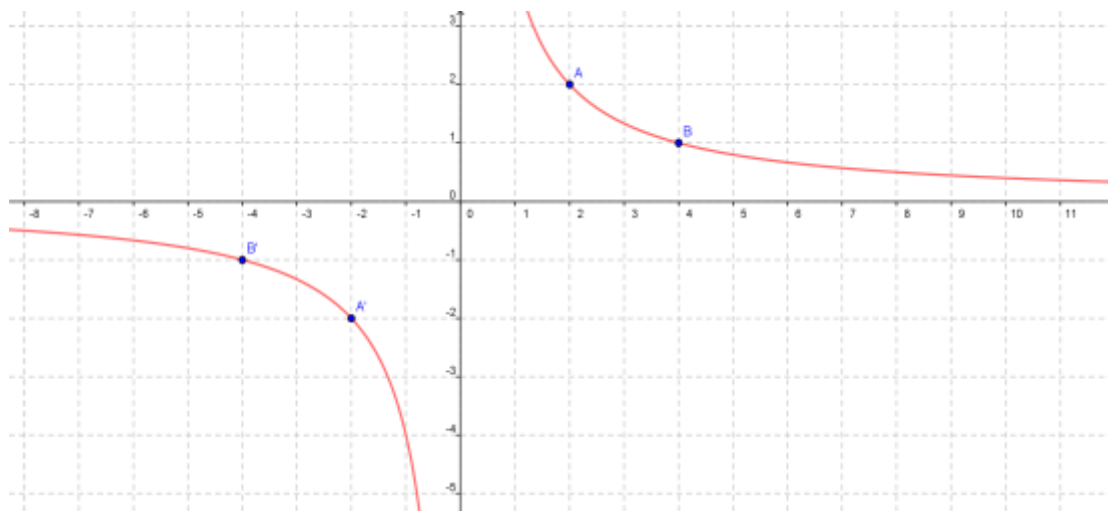
Η συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας

Τα σημεία $A(\dots, \dots)$, $A'(\dots, \dots)$, $B(\dots, \dots)$, $B'(\dots, \dots)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f

Συμπέρασμα : $M(x, y) \in C_f \Rightarrow M'(-x, y) \in C_f$

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται άρτια

αν για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$ και $f(-x) = f(x)$

Δραστηριότητα 2^η

Η συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας

Τα σημεία $A(\dots, \dots)$, $A'(\dots, \dots)$, $B(\dots, \dots)$, $B'(\dots, \dots)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f

Συμπέρασμα : $M(x, y) \in C_f \Rightarrow M'(-x, \dots) \in C_f$

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται περιττή αν

για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$

Πως θα αποδείξω αλγεβρικά αν μία συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή ;

Βρίσκω το πεδίο ορισμού A ,

θέτω όπου x το $-x$ (υπο την προϋπόθεση ότι για $x \in A \Rightarrow -x \in A$)

Εκτελώ αλγεβρικές πράξεις .

Παράδειγμα :

$$f(x) = 3x^3 + 2x, x \in \mathbb{R}$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 + 2(-x) = -3x^3 - 2x = -(3x^3 + 2x)$$

ΕΡΩΤΗΣΗ Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$ είναι άρτια ή περιττή ;

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ που ορίζεται στο $A = (-1, 3)$ είναι άρτια ή περιττή ;

*****Ασκήσεις για λύση_Προαιρετικά**

1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα ρ τότε τα έχει ρίζα και το $-\rho$
2. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια τότε και η $-f$ είναι άρτια .
3. Αν το σημείο $A(3, 1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης , να βρείτε το $f(-3)$.
4. Μία συνάρτηση F έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει : $F(x-y) = F(x) - F(y)$.
i) βρείτε το $F(0)$
ii) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια συνάρτηση.