

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|+3$, $h(x)=|x|-3$.

2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 $f(x)=|x|$, $g(x)=|x+3|$, $h(x)=|x-3|$.

3. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 $f(x)=-|x|$, $g(x)=-|x|+1$, $h(x)=-|x|-1$.

4. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 $f(x)=-|x|$, $g(x)=-|x-1|$, $h(x)=-|x+1|$.

5. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x)=|x+1|+3$

ii) $f(x)=|x-2|+1$

iii) $f(x)=|x-3|-2$

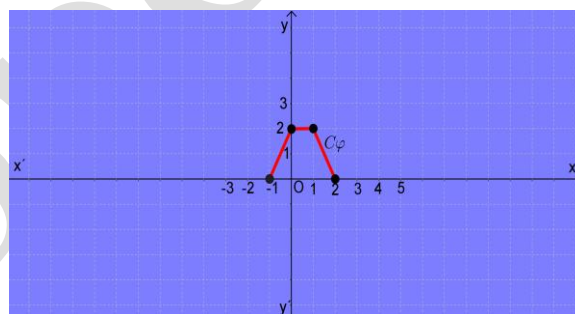
iv) $f(x)=|x+2|-3$

6. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ .

Στο συγκεκριμένο σύστημα των συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\varphi(x-3)$

ii) $g(x)=\varphi(x+2)$



7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x)=-|x-2|+3$

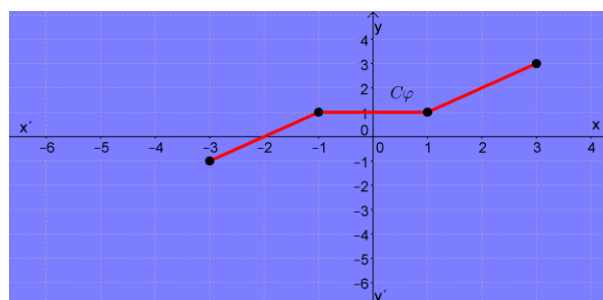
ii) $f(x)=-|x+3|-1$

8. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ .

Στο συγκεκριμένο σύστημα των συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\varphi(x)+1$

ii) $g(x)=\varphi(x)-2$

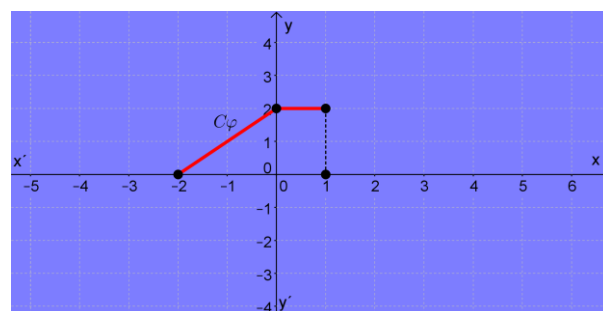


9. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ .

Στο συγκεκριμένο σύστημα των συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\varphi(x+2)+1$

ii) $g(x)=\varphi(x-1)-1$



10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + a}{|x| + 2}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο

$M(-3, 1)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

11. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = 3x^2 - 4x + 5$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ :

i) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά

ii) κατά 3 μονάδες προς τα κάτω

iii) διαδοχικά κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω

iv) διαδοχικά κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και 7 μονάδες προς τα κάτω

12. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 + 11x + 13$ και έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 5 μονάδες προς τα πάνω. Να βρείτε :

i) τον τύπο της συνάρτησης f

ii) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

iii) τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα x'

13. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |2x - 7| + 4$ και έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 9 μονάδες προς τα κάτω. Να βρείτε :

i) τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$

ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$

iii) τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα x'

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3|$ και έστω A και B τα σημεία της C_f με τετμημένες -3 και 5 αντίστοιχα.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B

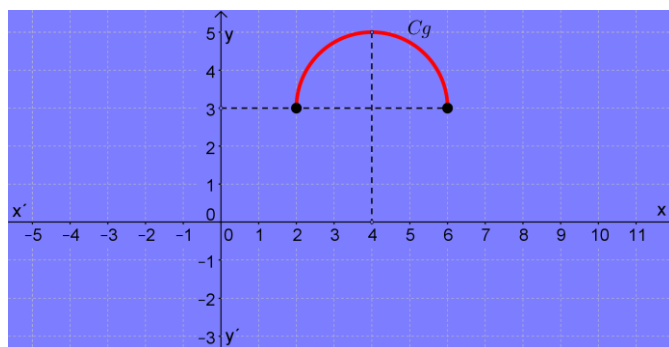
iii) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη C_f και την παραπάνω ευθεία ε .

iv) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση : $|x - 3| \leq -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

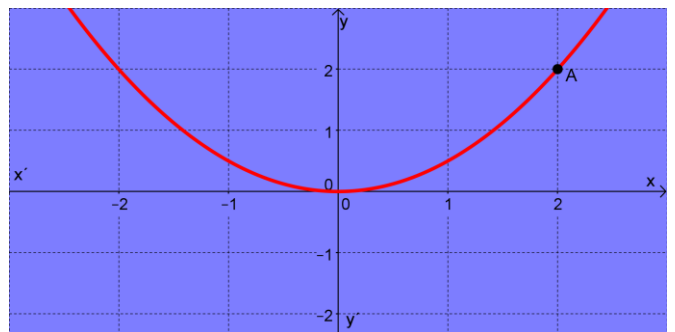
i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι το ημικύκλιο του διπλανού σχήματος.



Προσδιορισμός παραμέτρων

16. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = (2\lambda - 3)x^2$ διέρχεται από το σημείο $A(-2, -4)$.
 i) Να βρείτε τον αριθμό λ
 ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
17. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = (\alpha^2 - 6\alpha + 11)x^2$ διέρχεται από το σημείο $M(-3, 18)$.
 i) Να βρείτε τον αριθμό α
 ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
18. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης :
 i) $f(x) = (12 - 3\lambda)x^2$ είναι παραβολή που παρουσιάζει ελάχιστο.
 ii) $g(x) = (|\lambda - 2| - 5)x^2$ είναι παραβολή που παρουσιάζει μέγιστο.
 iii) $h(x) = (\lambda^2 - 3\lambda - 4)x^2$ είναι παραβολή που παρουσιάζει ελάχιστο.
19. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης :
 i) $f(x) = (3 - \lambda)x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$,
 ii) $f(x) = (|\lambda| - 1)x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$,
 iii) $f(x) = (3 - |\lambda + 2|)x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$,
 iv) $f(x) = (9 - |5 - 2\lambda|)x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)x^2$ και $g(x) = (|\lambda - 5| - 1)x^2$. Η C_f είναι παραβολή που παρουσιάζει μέγιστο και η C_g διέρχεται από το σημείο $M(-2, 8)$.
 i) Να βρείτε την τιμή του λ ,
 ii) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.
21. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ; $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$.
22. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = \frac{x^4 + ax^2}{x^2 - 4}$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, 1)$.
 i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τον αριθμό a
 ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
23. Δίνεται η παραβολή του διπλανού σχήματος, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$.
 Να βρείτε :
 i) την εξίσωση της παραβολής,
 ii) το σημείο της παραβολής με τετμημένη -4 ,
 iii) τα σημεία της παραβολής με τεταγμένη 18 ,
 iv) τον αριθμό λ , ώστε το σημείο $M(\lambda + 2, 4\lambda)$ να ανήκει στην παραπάνω παραβολή.



Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πολλαπλού τύπου

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ 2x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

- i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f,
- ii) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f,
- iii) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -1 \leq x \leq 2 \\ -2x+8, & \text{αν } 2 < x \leq 5 \end{cases}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f,
- iii) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f,
- iv) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x-6, & \text{αν } -6 \leq x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x^3, & \text{αν } -2 < x < 2 \\ -x+6, & \text{αν } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f,
- iii) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f,
- iv) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } |x| \leq 2 \\ 2x-8, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f,
- iii) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f,
- iv) Να βρείτε τα ακρότατα της f,
- v) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2}}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f,

29. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = x^2 \cdot |x|$.

Μετατόπιση γραφικών παραστάσεων

30. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- i) $f(x)=x^2$ και $g(x)=(x+2)^2$
- ii) $f(x)=-x^2$ και $g(x)=-x^2-1$
- iii) $f(x)=x^2$ και $g(x)=(x-2)^2+1$

31. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- i) $f(x)=x^3$ και $g(x)=(x+1)^3$
 ii) $f(x)=-x^3$ και $g(x)=-x^3+2$
 iii) $f(x)=x^3$ και $g(x)=(x-3)^3+2$

32. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- i) $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\sqrt{x-2}$
 ii) $f(x)=-\sqrt{x}$ και $g(x)=-\sqrt{x+1}$
 iii) $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\sqrt{x+2}-1$

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{|x|^3+4a}{|x|+2}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο

$M(-1,5)$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.
 ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} (x+a)^3, & \text{αν } x \leq 0 \\ -x^2+8, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

- i) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$
 ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f ,
 iii) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
 iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x^2-4|$.

- i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Συνδυαστικά θέματα

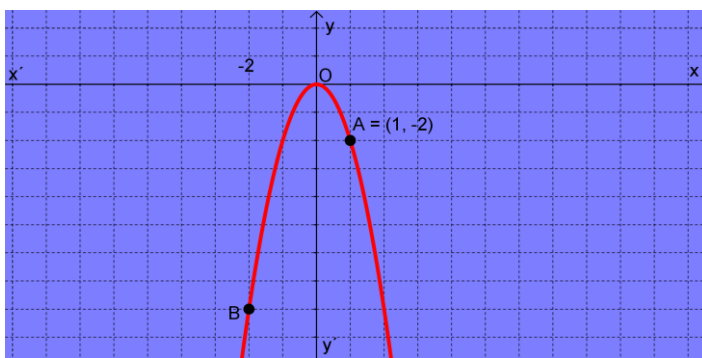
36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x-(x+a)|x|$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-3,18)$.

- i) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.
 ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
 iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 iv) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

37. Δίνεται η παραβολή του διπλανού σχήματος.

Να βρείτε :

- i) την εξίσωση της παραβολής,
 ii) τις συντεταγμένες του σημείου B,
 iii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B,
 v) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία ε με τους άξονες.



38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ και έστω A,B τα σημεία της C_f με τετμημένες -2 και 4 αντίστοιχα.

- i) Να βρείτε τις τεταγμένες των A και B
 ii) Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.
 α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε

β) Να σχεδιάσετε τη C_f και την ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

γ) Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε την ανίσωση : $\frac{1}{2}x^2 < x + 4$

δ) Να επιβεβαιώσετε γραφικά το παραπάνω συμπέρασμα.

$$\text{Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ } f(x) = \frac{\alpha}{x}$$

Προσδιορισμός παραμέτρων

39. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = \frac{2-a}{x}$ διέρχεται από το σημείο $K\left(a, -\frac{1}{2}\right)$.

i) Να βρείτε τον αριθμό λ

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

40. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = \frac{a^2 + 3a + 4}{x}$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, a)$.

i) Να βρείτε τον αριθμό a

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

41. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

i) $f(x) = \frac{3\mu + 6}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$,

ii) $f(x) = \frac{|\mu| - 5}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο,

iii) $f(x) = \frac{\mu^2 - 9}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

iv) $f(x) = \frac{\mu^2 - 2\mu - 8}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

42. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

i) $f(x) = \frac{1 - |\mu + 3|}{x}$ βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο,

ii) $f(x) = \frac{4\mu - \mu^2}{x}$ βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο

43. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = \frac{|a-1|-1}{x}$ διέρχεται από το σημείο $M(-2, -1)$ και η

συνάρτηση $g(x) = ax^2$ παρουσιάζει μέγιστο.

i) Να βρείτε τον αριθμό a

ii) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g .

44. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = \frac{\lambda x^2 - 24}{x^3 - 4x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχεται από το σημείο $M(3, 2)$.

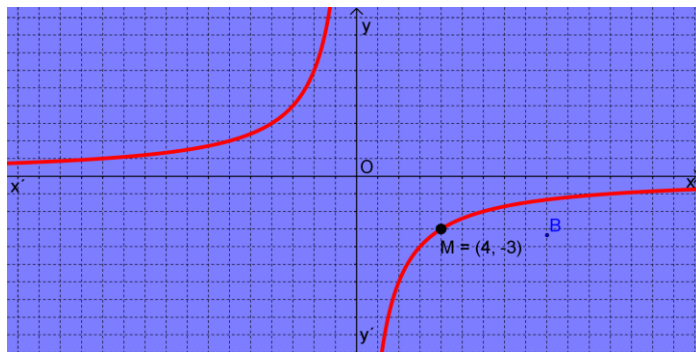
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τον αριθμό λ

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

45. Δίνεται η υπερβολή του διπλανού σχήματος.

Να βρείτε :

- την εξίσωση της υπερβολής,
- το σημείο της υπερβολής με τετμημένη -3,
- το σημείο της υπερβολής με τεταγμένη -6,
- τον αριθμό α , ώστε το σημείο $N(\alpha, \alpha+8)$ να ανήκει στην παραπάνω υπερβολή.



Χάραξη γραφικής παράστασης

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x, & \alpha \nu -2 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \alpha \nu x \geq 1 \end{cases}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f ,
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha \nu x \in [-2, 1) \\ \frac{2}{x}, & \alpha \nu x \in [1, +\infty) \end{cases}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f ,
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x}, & \alpha \nu x \leq -1 \\ 2, & \alpha \nu -1 < x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \alpha \nu x \geq 1 \end{cases}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f ,
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x}, & \alpha \nu x \leq -1 \\ -x-1, & \alpha \nu -1 < x < 0 \\ -x^2, & \alpha \nu 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f ,
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{ αν } |x| \geq 1 \\ x & , \text{ αν } |x| < 1 \end{cases}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f,
- iii) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f,
- iv) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|} & , \text{ αν } |x| \geq 1 \\ -x^2 & , \text{ αν } |x| < 1 \end{cases}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f,
- iii) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f,
- iv) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

52. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = \frac{|x|}{x^2}$.

Μετατόπιση γραφικών παραστάσεων

53. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- i) $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{1}{x} - 3$
- ii) $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{1}{x+2}$
- iii) $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{1}{x-3} + 2$

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + 12}{x^2 - 3x + 2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(-1) + f(4) = 1$.

- i) Να βρείτε τον αριθμό α
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x + \alpha}{x}$, $\alpha \neq -4$, για την οποία ισχύει $f(f(2)) = 3$.

- i) Να βρείτε τον αριθμό α
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

56. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha - 3}{x - 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ διέρχεται από το σημείο $M(2,3)$.

- i) Να βρείτε τον αριθμό α
- ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Συνδυαστικά θέματα

57. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, για $x > 0$ με $\alpha > 0$ και M σημείο της γραφική παράσταση της f. Έστω A και B οι προβολές του M στους ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα.

- i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΜΒ είναι σταθερό ,όταν το Μ διατρέχει τη γραφική παράσταση της f βρείτε τον αριθμό α
 ii) Αν $\alpha=1$,να βρείτε το σημείο Μ ,ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΒ να είναι η ελάχιστη.

58. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{1}{x}$, με $x > 0$ και $g(x) = -x^2$.

- i) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων
 ii) Από το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ της C_f σχεδιάζουμε ευθεία παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει τη C_g στο σημείο Β.
 α) Να εκφράσετε με τη βοήθεια του α τις συντεταγμένες του σημείου Β και την απόσταση (ΑΒ)
 β) Να βρείτε το α , αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΟ είναι 1 ,όπου Ο η αρχή των αξόνων.

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1| - |x+1|}{|x-1| + |x+1|}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f ,
 iii) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
 iv) Να βρείτε τα ακρότατα της f .

60. Δίνεται η υπερβολή $f(x) = \frac{2-2\lambda}{x}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(\lambda-3, -\lambda-2)$

- i) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
 ii) Έστω Α,Β,Γ τα σημεία της C_f με τετμημένες -3,2,3 αντίστοιχα.
 α) Να βρείτε τις τεταγμένες των Α,Β,Γ
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\lambda-6}{x}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και η γραφική της

παράσταση διέρχεται από τα σημεία $M(\lambda-4, \lambda)$ και $N\left(-\frac{\lambda}{2}, \kappa\right)$.

- i) Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ
 ii) Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Μ και Ν.
 α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ,
 β) Να σχεδιάσετε τη C_f και την ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων.
 γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση : $\frac{12}{x} < 2x + 2$
 δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του παραπάνω ερωτήματος.

$$\text{Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ } f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Μελέτη και γραφική παράσταση

62. Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή των παραβολών:

- i) $f(x) = x^2 + 4x - 2$
 ii) $f(x) = -x^2 + 6x - 4$
 iii) $f(x) = -2x^2 + 3$
 iv) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

63. Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή των παραβολών:

- i) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- ii) $f(x) = -x^2 - 4x + 2$
- iii) $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$
- iv) $f(x) = -3x^2 - 4$
- v) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$
- vi) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f
- ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

- i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f
- ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$.

- i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f
- ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x - 4$.

- i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f
- ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

68. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 8x + 8$.

- i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f
- ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$.

- i) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f
- ii) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

70. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

- i) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
- ii) $f(x) = -x^2 + 4$
- iii) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

iv) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

v) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$

vi) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

71. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 4x|$.

- i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- iii) Να βρείτε τα ακρότατα της f καθώς και τις θέσεις τους

72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

- i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- iii) Να βρείτε τα ακρότατα της f καθώς και τις θέσεις τους

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- iii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- iv) Να βρείτε τα ακρότατα της f καθώς και τις θέσεις τους

Προσδιορισμός παραμέτρου

74. Η παραβολή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ έχει κορυφή το σημείο $K(3, -4)$. Να βρείτε :

- i) τους αριθμούς β και γ
- ii) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

75. Η παραβολή $f(x) = \lambda x^2 + (\lambda + 2)x - 2(2\lambda - 1)$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.

- i) Να βρείτε τον αριθμό λ
- ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 10$.

76. Η παραβολή $f(x) = \lambda x^2 + (\lambda + 3)x + 1 - \lambda$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Να βρείτε

- i) τον αριθμό λ
- ii) την κορυφή της παραβολής.

77. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = \lambda x^2 + 4x + \lambda + 3$ είναι παραβολή που τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία.

78. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = (\lambda^2 - 3\lambda - 4)x^2 - 5x + 2 \quad \text{είναι παραβολή η οποία παρουσιάζει μέγιστο.}$$

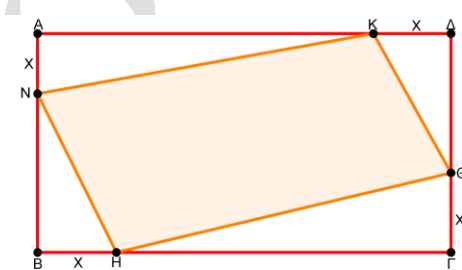
79. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η παραβολή : $f(x) = 3x^2 + (\lambda^2 - 4\lambda - 12)x - 5$ έχει κορυφή με αρνητική τετμημένη.

80. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = (\lambda - 2)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 3\lambda - 5 \quad \text{είναι παραβολή η οποία παρουσιάζει ελάχιστο και τέμνει τον } x'x \text{ σε δύο σημεία.}$$

81. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + (\lambda + 2)x - 2\lambda$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε τον αριθμό λ
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
82. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2(\mu + 1)x + \nu$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη 1 και έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.
- Να βρείτε τους αριθμούς μ και ν
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 21$.
83. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η κορυφή της παραβολής : $f(x) = x^2 + (\lambda - 2)x - \lambda + 1$ είναι σημείο :
- του άξονα $x'x$
 - του άξονα $y'y$.
84. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 + (\mu - 1)x + 3\mu - 2$ διέρχεται από την κορυφή της παραβολής με $g(x) = x^2 - 6x + 4$. Να βρείτε :
- τον αριθμό μ
 - τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της γραφικής παράστασης της f .
 - τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .
85. Η παραβολή $f(x) = ax^2 - 3ax + 13$ έχει κορυφή με τεταγμένη α .
- Να βρείτε τον αριθμό α
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\lambda - 3)x - \lambda + 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η γραφική παράσταση της f :
- εφάπτεται στον άξονα $x'x$
 - έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
 - έχει κορυφή με τεταγμένη -4 .
87. Η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή, η οποία τέμνει τον $x'x$ σε σημεία με τετμημένες 1 και 3 και τον $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη -3 . Να βρείτε:
- τον τύπο της f
 - τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της f .
 - τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
88. Η παραβολή $f(x) = (\lambda - 1)x^2 - (\lambda^2 - 4)x + 7$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$. Να βρείτε :
- τον αριθμό λ
 - την κορυφή της παραβολής.
89. Η παραβολή $f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (\lambda^2 - 4\lambda - 9)x + 4\lambda$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 3$. Να βρείτε :
- τον αριθμό λ
 - την κορυφή της παραβολής.
90. Η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + (\lambda - 6)x - \lambda - 4$ έχει ελάχιστο το $f(x_0) = -8$. Να βρείτε :
- τον αριθμό λ
 - τον άξονα συμμετρίας της C_f .

Προβλήματα μεγίστων-ελαχίστων

91. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος $x - 2$ cm και πλάτος $10 - x$ cm. Να βρείτε:
- ποιες τιμές μπορεί να πάρει το x ,
 - το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου,
 - για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο εμβαδόν.
92. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 40 cm.
- Αν το μήκος του είναι x cm, να εκφράσετε συναρτήσει του x , το πλάτος και το εμβαδόν του ορθογωνίου.
 - Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο εμβαδόν.
93. Μια βιομηχανία παράγει x αυτοκίνητα την εβδομάδα, που το καθένα κοστίζει 4.000 €. Η τιμή πώλησης κάθε αυτοκινήτου είναι $T(x) = 8.000 - 10x$ €
Πόσα αυτοκίνητα πρέπει να κατασκευάζει η βιομηχανία κάθε εβδομάδα, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος; Ποιο είναι αυτό το μέγιστο κέρδος;
94. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, διαστάσεων $AB = 7$ cm και $B\Gamma = 5$ cm. Στις πλευρές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA παίρνουμε τα σημεία K , Λ , M και N αντίστοιχα, ώστε $KB = \Lambda\Gamma = M\Delta = NA = x$.
Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν του τετράπλευρου $K\Lambda M N$ έχει το ελάχιστο εμβαδόν, καθώς και ποιο είναι το ελάχιστο αυτό εμβαδόν.
- 
95. Αν ένας αγρότης μαζέψει σήμερα τα μήλα του, κάθε μηλιά θα αποδώσει 40 κιλά και η τιμή πώλησης θα είναι 1 ευρώ (€) το κιλό. Αν τα μαζέψει αργότερα, τότε για κάθε επιπλέον εβδομάδα η απόδοση κάθε δέντρου αυξάνεται κατά 4 κιλά, ενώ η τιμή πώλησης μειώνεται κατά 5 λεπτά (cents) το κιλό. Μετά από πόσες εβδομάδες συμφέρει τον αγρότη να πουλήσει τα μήλα για να έχει το μέγιστο κέρδος;
96. Μια ευθεία ϵ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A με τετμημένη 6 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο B με τεταγμένη 4.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ .
 - Έστω M ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και K , Λ οι προβολές του στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου $OK\Lambda M$ γίνεται μέγιστο (όπου O η αρχή των αξόνων).

Συνδυαστικά θέματα

97. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4x - \lambda^2 + 8\lambda - 7$
- Να βρείτε για ποια τιμή του λ , το ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.
 - Για την τιμή του λ που βρήκατε:
 - να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,
 - να λύσετε την ανίσωση $f(x) + f(x - 1) < 15$.
98. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^2 + 6x + \lambda^2 - 8\lambda$.
- Να βρείτε για ποια τιμή του λ , το ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.
 - Για την τιμή του λ που βρήκατε:
 - να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,
 - να λύσετε την ανίσωση $f(|x| + 1) \geq -8$.

99. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 7 = 0$ (1)

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Αν x_1 και x_2 είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποια τιμή του λ , η τιμή της παράστασης $x_1^2 + x_2^2$ γίνεται ελάχιστη.

100. Δίνεται η παραβολή: $f(x) = \mu x^2 + 2(\mu - 1)x + \mu - 1$, $\mu \neq 0$. Η κορυφή της παραβολής ανήκει στην ευθεία $y = 2x + 6$.

i) Να βρείτε τον αριθμό μ .

ii) Δίνεται και η συνάρτηση: $g(x) = -x^2 + 4\lambda^2 + 16\lambda - 10$.

Να βρείτε για ποια τιμή του λ , το σημείο τομής των C_f και C_g έχει τη μεγαλύτερη τετμημένη.

101. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = |x^2 + ax + 2a - 13|$ με $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-1) = f(-3)$.

i) Να βρείτε την τιμή του a .

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

102. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + \lambda|x| + \lambda + 2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-3, 3)$.

i) Να βρείτε την τιμή του λ .

ii) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

iii) Αν K και Λ είναι τα σημεία της C_f με τετμημένες -2 και 4 αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$.

iv) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

v) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

103. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Θεωρούμε και τη συνάρτηση:

$f(x) = 6x^2 - 3P(A)x + 1$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, 9)$.

i) Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) + f\left(x - \frac{5}{3}\right) < 58$

iii) Αν επιπλέον η γραφική παράσταση της f έχει κορυφή το σημείο $K(P(A \cap B), P(A \cup B))$, να βρείτε την πιθανότητα:

α) $P(B)$,

β) να πραγματοποιηθεί το B και να μην πραγματοποιηθεί το A ,

γ) να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A, B .

104. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) , με $a_3 \neq 0$, και η συνάρτηση $f(x) = a_3x^2 + a_6x + 16$. Η γραφική παράσταση της f έχει κορυφή το σημείο $K(1, S_9)$, όπου S_9 το άθροισμα των 9 πρώτων όρων της (a_n) .

i) Να αποδείξετε ότι $a_1 = -6$ και ότι η διαφορά της a_n είναι $\omega = 2$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία,

iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων a_n για τους οποίους ισχύει: $f(a_n) \geq 80 - 32a_n$