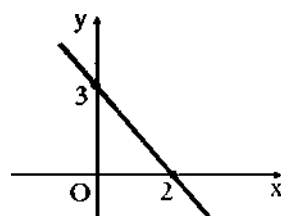


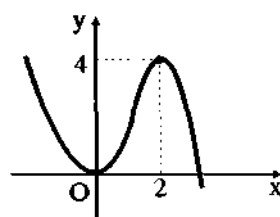
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μονοτονία συνάρτησης

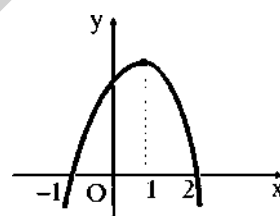
1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις
i. $f(x) = 2x^3 + 1$ ii. $f(x) = -5x^3 - 3x$
2. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ τις συναρτήσεις.
i. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ii. $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-1}$
3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις
i. $f(x) = \sqrt{x}$ ii. $f(x) = 2 + \sqrt{5-x}$ iii. $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$ iv. $f(x) = \frac{1}{x+1} - \sqrt{x+1}$
4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $(-\infty, 0)$ τις συναρτήσεις
i. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ ii. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$
5. Με τη βοήθεια των γραφικών τους παραστάσεων να γράψετε τα διαστήματα στα οποία κάθε συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα ή σταθερή



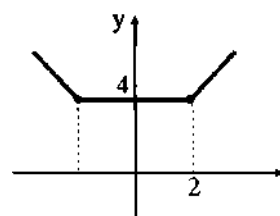
$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$



$$h(x) = -x^3 + 3x^2$$



$$g(x) = -x^2 + x + 2$$



$$t(x) = |x-2| + 2$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2|a|-1)x - 3$. Να βρείτε τις τιμές του a ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 1)x + 5$. Να βρείτε το λ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα.
8. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = (|a|-1)x + a$ για τις διάφορες τιμές του a .
9. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x + 3$ παριστάνει ευ-

- i. $f(x) < f(3)$
- ii. $f(3x-1) > f(x-5)$
- iii. $f(|x|) - f(5) < 0$
- iv. $f(x^2) > f(1)$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

- i. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία.
- ii. Να δείξετε ότι $f\left(2003 + \frac{1}{2003}\right) > 1$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 2$.

22. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 3 να λύσετε τις ανισώσεις.

- i. $f(x) > 0$
- ii. $f(x) \leq 0$
- iii. $f(|x-1|) < 0$
- iv. $f(2x^2) \geq 0$

23. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 και τον αρνητικό ημιάξονα Oy' να λύσετε την ανίσωση $f(2 - x^2) < 0$

24. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Αν $f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{3}{4}\right)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ να λύσετε την ανίσωση $f(|2x-1|) < 3$

25. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, 4)$. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2-7) < 2$.

26. Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 3 και τον $y'y$ στο 1. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

- i. να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- ii. να λύσετε την ανίσωση $0 < f(x) < 1$

27. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$, $B(3, 2)$ και η f είναι γνησίως μονότονη να λύσετε την ανίσωση $|f(x)| < 2$.

Ακρότατα συνάρτησης

28. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

- i. $f(x) = 3x^4 - 2$
- ii. $f(x) = 2(x-3)^2 - 5$
- iii. $f(x) = -2x^6 + 3$
- iv. $f(x) = 3 - 5(x-1)^2$
- v. $f(x) = 2|x| - 1$
- vi. $F(x) = 5 - 3|x-1|$
- vii. $f(x) = \sqrt{x} + 3$

29. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

- i. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
- ii. $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 9$
- iii. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

30. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \frac{2}{x^2 + 5} \quad \text{ii. } f(x) = -\frac{3}{|x| + 2}$$

31. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2x + 3, x \in [1, +\infty)$

ii. $f(x) = -2x + 1, x \in (-\infty, 1]$

iii. $f(x) = 3x - 1, x \in [-2, 3]$

iv. $f(x) = -5x + 3, x \in [-1, 2]$

32. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[-3, 0]$ και $[0, 3]$.

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της f και τα σημεία που τα παρουσιάζει.

Άρτιες – Περιττές συναρτήσεις

4. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

i. $f(x) = 5x^6 - 2x^2 + 3$

ii. $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x$

iii. $f(x) = x^3 - 3x|x| + 2x$

iv. $f(x) = |3x - 2| + |3x + 2|$

34. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

i. $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$. ii. $f(x) = \frac{x^3}{|x| - 1}$

iii. $f(x) = \frac{3|x| + 2}{x^3 - x}$ iv. $f(x) = \frac{x^3 - x|x|}{x^2 + 1}$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3|x| - 2}{\frac{1}{x} - x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4} + 1}{|x| - 3}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

37. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

i. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0 \\ 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x, & x \geq 0 \\ 3x^2 + x, & x < 0 \end{cases}$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1} + 5|x|$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
39. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και ποιες κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x + 1$.
- Να βρείτε τα $f(1)$ και $f(-1)$.
 - Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
41. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και τα σημεία $A(3, -2)$, $B(-3, \lambda)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε το λ .
42. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , να δείξετε ότι: $17f(2) + 11f(-2) - 3791f(0) = 0$
43. Αν η συνάρτηση $f: (2\lambda, \lambda^2) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια, να βρείτε το λ .
44. Αν η συνάρτηση $f: (\alpha, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια και $f(1) - f(-1) = \alpha + \beta^2$ να βρείτε τα α και β .
45. Αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\alpha - 1)x + 5$ είναι άρτια να βρείτε το α .

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ

46. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το A και είναι περιττές να δείξετε ότι η συνάρτηση:
- $h(x) = f(x) + g(x)$ είναι περιττή
 - $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι άρτια.
47. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συγχρόνως άρτια και περιττή, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή με τιμή 0.
48. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή. Να δείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = f(|x|) \cdot f(x)$ είναι άρτια.
49. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
- η συνάρτηση $g(x) = f(2+x) - f(2-x)$ είναι περιττή.
 - η συνάρτηση $h(x) = f(3-x) + f(3+x)$ είναι άρτια.
50. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή. Να δείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = |f(x)| - 2f(x^2) - x^2 + 1$ είναι άρτια.
51. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - xf(x) + 2$.
- Να βρείτε το $g(0)$.
 - Να δείξετε ότι η g είναι άρτια.
52. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f(x))^3 = 2x^3 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να

δείξετε ότι η f είναι περιττή.

53. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) + f(-x) = x^3|x| - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

54. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f(x) - 3f(-x) = 2x^3 - 3x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

55. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \begin{cases} \alpha x - 2\beta & , \text{αν } x \leq 2 \\ \beta x + 4\alpha + 3, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

- α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β
- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
- δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f , καθώς και τις θέσεις τους

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{9 - x}}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
- γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9 - x} - \sqrt{2x + 4} - x$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- β) Να βρείτε το σημείο τομής της f με τον άξονα $y'y$
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
- δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f
- ε) Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{9 - x} < \sqrt{2x + 4} + x + 1$

58. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = (\lambda^2 + 1)x - \lambda^2 - 3$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, -13)$.

- α) Να βρείτε τον αριθμό λ
- β) Θεωρούμε το σημείο B της C_f με τεταγμένη -4 και τη συνάρτηση:

$g(x) = \frac{\alpha(x-1) + 20}{x^2 + 4}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο B .

- i. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου B
- ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 20$
- iii. Να εξετάσετε αν η g είναι άρτια ή περιττή
- iv. Να αποδείξετε ότι η g έχει ελάχιστο το -5 και μέγιστο το 5

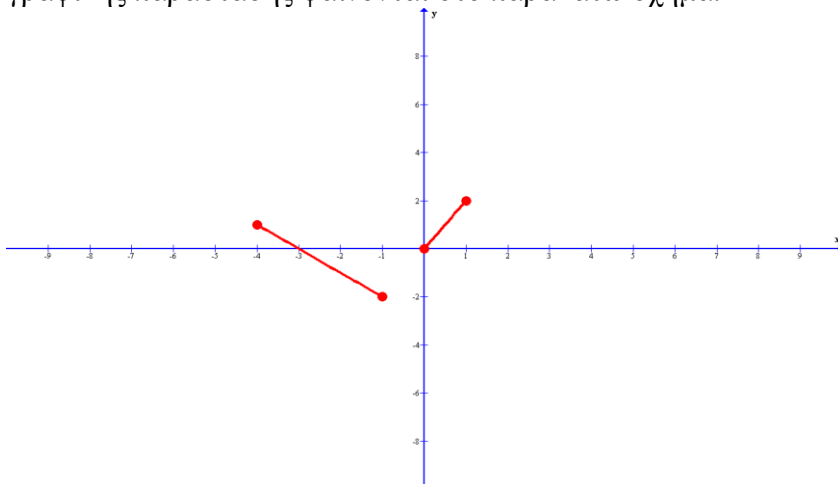
59. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [\lambda, \mu] \cup [2\lambda + 12, 1 - 2\mu]$ και είναι περιττή.

- α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = \frac{|f(x)| + f(0)}{x^2 + \lambda - \mu}$ είναι

άρτια

60. Δίνεται περιττή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[-4,4]$ της οποίας τμήματα της γραφικής παράστασης φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f
 β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι :
 i. γνησίως φθίνουσα
 ii. γνησίως αύξουσα
 γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f καθώς και τις θέσεις τους
 δ) Να βρείτε τον τύπο της f
61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha x + \alpha + 3} - 2$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(4,1)$
 α) Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f
 γ) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f
 δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f καθώς και τις θέσεις τους
62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\lambda - \mu)x + 2\mu - 5\lambda$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 Η C_f έχει κορυφή με τετμημένη 2 και τέμνει το άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1
 α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=3$ και $\mu=7$
 β) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f
 γ) Έστω $g(x)$ η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της C_f , μία οριζόντια κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μία κατακόρυφη κατά 4 μονάδες προς τα κάτω
 i) Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης g
 ii) Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) + g(x) < 3$
 iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = 5f(x) - 2g(x)$ είναι άρτια
63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \lambda x$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-2,18)$
 α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=-5$
 β) Να εξετάσετε αν η g είναι άρτια ή περιττή
 γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
 δ) Αν $\alpha \neq \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\alpha^2 + \beta^2)$ και $f(2\alpha\beta)$

ε) Να λύσετε την ανίσωση : $(2x-1)^3 - (x^2-4)^3 < 5(x^2-2x-3)$

64. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
- β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.
- γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
- δ. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

65. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{|x|}{x^2-2}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- β. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$.
- δ. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- β. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < \frac{1}{4}$

67. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = |x-1| + |x+1|$.

- α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -1 \\ 2, & -1 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

- γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
- δ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

68. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
- β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 2$.

69. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$.

- i. Να εξετάσετε την f ως προς την μονotonία.
- ii. Να δείξετε ότι: $f\left(\frac{2003}{2004} + \frac{2004}{2003}\right) > 1$
- iii. Να δείξετε ότι: $f(\sqrt[3]{9}) > 1$.

70. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + (a - 1)x + 2a - \beta$.
 Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -1 και τον $y'y$ στο -3 .
 α. να βρείτε τα a και β
 β. για $a = -1$ και $\beta = 1$
 i. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
 ii. να λύσετε την ανίσωση: $f(2x) > 5$.
71. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = x - \frac{1}{x}$
 α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
 β. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
 γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.
72. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = x + \frac{1}{x}$
 α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
 β. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| \geq 2$ για κάθε $x \neq 0$.
 γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο διάστημα $(0, +\infty)$.
 δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 3$.
73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-1}$
 α. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
 β. Να κάνετε τον πίνακα πρόσημων της συνάρτησης f .
 γ. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $(1, +\infty)$
74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x| + 2} + \frac{1}{|x|}$
 i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 ii. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.
 iii. Να λύσετε την εξίσωση: $|x|(|x| + 2) \cdot f(x) = 2$.
75. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
 α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 β. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.
 γ. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$.
 δ. Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή το 0 και μέγιστη τιμή το 2 .
 ε. Να εξετάσετε αν μπορεί η συνάρτηση f να έχει τιμή έναν αριθμό της μορφής $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ με $\alpha \neq 0$.