

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
(παράγραφοι 3.1 έως και 3.5)

A. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{2\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1}{\eta\mu^2\alpha} = 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha} & 2. \quad & \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \\
 3. \quad & \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\varphi\alpha + 1} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha + 1} = \frac{1}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} & 4. \quad & \eta\mu^2\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \sigma\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\alpha - \sigma\varphi\alpha \\
 5. \quad & \sigma\upsilon\nu\alpha(1 + \varepsilon\varphi\alpha) + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha(1 - \varepsilon\varphi\alpha)} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha} \\
 6. \quad & \left(\frac{1}{\eta\mu\alpha} - \eta\mu\alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \sigma\upsilon\nu\alpha\right)^2 = \varepsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha - 1 & 7. \quad & \frac{1 + \varepsilon\varphi^3\alpha}{1 + \sigma\varphi^3\alpha} = \left(\frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \sigma\varphi\alpha}\right)^3
 \end{aligned}$$

B. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\eta\mu 135^\circ \eta\mu 420^\circ - \sigma\upsilon\nu 855^\circ \sigma\upsilon\nu(-480^\circ)}{\varepsilon\varphi(-480^\circ) + \sigma\varphi(-135^\circ)} \\
 \Lambda &= \frac{\varepsilon\varphi 205^\circ - \varepsilon\varphi 115^\circ}{\varepsilon\varphi 245^\circ + \varepsilon\varphi 335^\circ}, \quad \alpha\nu \quad \varepsilon\varphi 25^\circ \approx 0,47 \\
 M &= \eta\mu(17\pi - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu(15\pi + \alpha) \eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} - \alpha\right) \\
 N &= 1 + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \eta\mu^2(200^\circ + \alpha) + \eta\mu^2(70^\circ - \alpha)
 \end{aligned}$$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \eta\mu^2\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{6} - 2\alpha\right) = 1 & 2. \quad & \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) = 1 \\
 3. \quad & \varepsilon\varphi \frac{\pi}{36} \cdot \varepsilon\varphi \frac{2\pi}{36} \cdot \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{36} \cdot \dots \cdot \varepsilon\varphi \frac{17\pi}{36} = 1
 \end{aligned}$$

Δ. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{\eta\mu(3\pi + \omega) \eta\mu(6\pi - \omega) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{2} + \omega\right) \sigma\varphi\left(\frac{11\pi}{2} + \omega\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} - \omega\right) \eta\mu(17\pi + \omega)} \\
 \beta &= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\left(\omega + \frac{9\pi}{2}\right)}{\eta\mu\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\sigma\upsilon\nu(5\pi + \omega)}{1 - \sigma\upsilon\nu\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right)} + \frac{1 - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} - \omega\right)} - \frac{\eta\mu(4\pi - \omega)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - \omega) - 1}
 \end{aligned}$$

Ε. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = 5 \cdot \eta\mu 3x - 1$ 2. $g(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3} + 3$ 3. $h(x) = 5 - \eta\mu \frac{x}{2}$
4. $f(x) = -\sigma\upsilon\nu 2x + 3$ 5. $v(x) = 1 + \eta\mu 4x$

Ζ. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = a \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\beta x}{2} - 3$, $x \in \mathbb{R}$ με περίοδο π και μέγιστη τιμή το 2. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β καθώς και την τιμή του x , $x \in [0, \pi]$, στην οποία παρουσιάζει ελάχιστο η συνάρτηση.

Η. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $\eta\mu 2x = -\sigma\upsilon\nu \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$ 2. $\varepsilon\varphi \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -\sigma\varphi \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$
3. $\eta\mu \left(2x - \frac{\pi}{12} \right) + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{7\pi}{12} - 2x \right) = 2\eta\mu 3x$ 4. $\sigma\upsilon\nu 3x = -\eta\mu 3x$, $x \in (0, \pi)$
5. $\varepsilon\varphi x = \eta\mu x$ 6. $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} - 2\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sqrt{3} \cdot \eta\mu (\pi + x) = 0$
7. $2\eta\mu^2 x + (\sqrt{3} - 2)\eta\mu x - \sqrt{3} = 0$ 8. $2\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$
9. $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\eta\mu x = 0$ 10. $\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 0$

Ι. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x) = 3 - 4\eta\mu 2x$ και $g(x) = a + \sigma\upsilon\nu \beta x$

Αν η συνάρτηση g έχει την ίδια μέγιστη τιμή με την f ενώ η περίοδος της g είναι κατά π μεγαλύτερη από την περίοδο της f τότε:

1. Να βρείτε τις τιμές των a και β και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της g .

2. Να λύσετε την εξίσωση: $4 \cdot g(x) - f(x) = 21$, αν $x \in (-\pi, \pi)$