

3.5. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μεθοδολογία

- Συναρτήσεις της μορφής $\eta\mu ax$ ή $\sigma\upsilon na x$ έχουν περίοδο $2\pi/a$ ενώ οι συναρτήσεις της μορφής $\epsilon\phi ax$ ή $\sigma\phi ax$ έχουν περίοδο π/a .
- Συναρτήσεις της μορφής $\alpha\eta\mu x$ ή $\alpha\sigma\upsilon n x$ έχουν ακρότατα $-\alpha$ και α .
- Συναρτήσεις της μορφής $-\eta\mu x$, $-\sigma\upsilon n x$, $-\epsilon\phi x$, $-\sigma\phi x$ είναι συμμετρικές των αρχικών ως προς τον οριζόντιο άξονα.
- Συναρτήσεις της μορφής $\alpha+\eta\mu x$, $\alpha+\sigma\upsilon n x$, $\alpha+\epsilon\phi x$, $\alpha+\sigma\phi x$ είναι μετατοπισμένες στον κάθετο άξονα κατά α .
- Συναρτήσεις της μορφής $\eta\mu(ax+\beta)$, $\sigma\upsilon n(ax+\beta)$, $\epsilon\phi(ax+\beta)$, $\sigma\phi(ax+\beta)$ είναι μετατοπισμένες στον οριζόντιο άξονα κατά $-\beta/a$.
- Μία τριγωνομετρική συνάρτηση μπορεί να υπάγεται σε περισσότερες από μία από τις παραπάνω περιπτώσεις π.χ. $-3\eta\mu(2x-\frac{\pi}{4})+5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑ

1. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 4\eta\mu x$ β) $f(x) = 2\sigma\upsilon n 2x - 5$

γ) $f(x) = -3\eta\mu 3x + 4$ δ) $f(x) = -5\sigma\upsilon n 3x$

2. Να βρείτε την περίοδο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3\eta\mu 2x$ β) $f(x) = 2\sigma\upsilon n 3x$

γ) $f(x) = 5\eta\mu \frac{x}{2}$ δ) $f(x) = -2\sigma\upsilon n \frac{x}{3}$

3. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις :

α. $f(x) = \eta\mu x$ β. $f(x) = 3\eta\mu x$ γ. $f(x) = \eta\mu 2x$ δ. $f(x) = 4\eta\mu 2x$

4. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις :

α. $f(x) = \sigma\upsilon n x$ β. $f(x) = -4\sigma\upsilon n x$ γ. $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon n 2x$

5. Να βρεθεί η περίοδος των συναρτήσεων.

(i) $f(x) = 5\eta\mu 2x$ (ii) $f(x) = -6\sigma\upsilon n \frac{x}{3}$ (iii) $f(x) = 8\epsilon\phi 8x$ (iv) $f(x) = 4\sigma\phi \frac{x}{2}$

6. Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 4 - 3\eta\mu 5x$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις:

i. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3}{2}x\right)$

ii. $g(x) = -5\eta\mu(\sqrt{3}x)$

iii. $h(x) = -\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2\pi}\right)$

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή καθώς και η περίοδος για κάθε μια από τις παραπάνω συναρτήσεις.

8. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις :

α. $f(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x$ β. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3x - 5$ γ. $f(x) = 4 - 3\eta\mu\frac{x}{2}$

9. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις :

α. $f(x) = \epsilon\phi x$ β. $f(x) = \epsilon\phi 2x$ γ. $f(x) = \sigma\phi x$ δ. $f(x) = \sigma\phi\frac{x}{2}$

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \eta\mu(\pi + x)$$

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)$ και να απλοποιηθεί ο τύπος της.
 β) Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της $f(x)$, δηλαδή η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή.
 γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x)$.

Β' ΟΜΑΔΑ

11. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις:

i) $f(x) = \eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x + 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$

ii) $g(x) = \frac{2\epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x} + 2(\sigma\upsilon\nu^2 x + 1)$ είναι σταθερές.

12. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

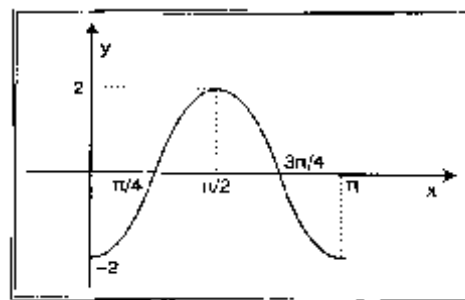
α. $f(x) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

β. $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

γ. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(4x + \pi)$

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$, $\rho, \omega > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή το 5 και περίοδο $T = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τις τιμές των ρ και ω .

14. Το διπλανό σχήμα παριστάνει τη γραφική παράσταση της $g(x) = \rho \sin(\omega x)$, $\rho < 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών ω , ρ .



15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right) + \beta$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.
- Αν η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η γραφική παράσταση τέμνει τον $\psi\psi$ στο 1 βρείτε τον τύπο της f .
 - Να κάνετε την γραφική παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου και στο διάστημα να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $\chi\chi$.

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) - 2\eta\mu(2x - \pi)$$

- Να αποδείξετε ότι $h(x) = 3\eta\mu 2x$.
- Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $h(x)$, όταν $0 \leq x \leq 2\pi$.
- Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $h(x) = 1$ όταν $0 \leq x \leq 2\pi$.

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \sin(\pi - 3x) + \eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + 3x\right)$$

- Να αποδείξετε ότι $g(x) = -2\sin 3x$.
- Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $g(x)$, όταν $0 \leq x \leq 2\pi$.
- Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $g(x) = -1$ όταν $0 \leq x \leq 2\pi$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2 + \eta\mu(x - \pi) - \sigma\upsilon\nu(x + \pi)}{3 + \sigma\upsilon\nu(x - \pi) + \eta\mu(x + \pi)}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \frac{2 - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{3 - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$.

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της f.

γ) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $T = 2\pi$ είναι περίοδος της f(x).

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \kappa + 3 + 2\eta\mu \frac{(2\lambda + 1)x}{3}$ και

$g(x) = 6\lambda + 10 - 3\sigma\upsilon\nu \frac{(\kappa - 2)x}{4}$ να βρεθούν τα $\kappa \in (2, +\infty)$ και $\lambda \in (0, +\infty)$ αν είναι

γνωστό ότι έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και η περίοδος της f είναι τριπλάσια από την περίοδο της g.

20. Να λυθεί η ανίσωση $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ όταν $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$

21. Δίνεται περιοδική συνάρτηση f με περίοδο T, $T > 0$, και πεδίο ορισμού το R. Στο διάστημα $[0, T]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 2008 για το μοναδικό $x = \frac{\pi}{4}$ και στο διάστημα $[2T, 3T]$ η συνάρτηση

παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x = \frac{9\pi}{4}$.

i) Να βρεθεί η περίοδος T της συνάρτησης.

ii) Αν $f(x) = a\eta\mu(\omega x)$ να βρείτε το α και το ω και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[0, 3T]$.

22. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu[2(\pi - x)] + \sigma\upsilon\nu(\pi + 2x)$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$.

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A, την περίοδο και τα ακρότατα της f(x).

iii) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση C_f της f(x).

iv) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $g(x) = f(x) - 2$

β) $g(x) = f(x) + 1$

γ) $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

δ) $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

23. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \eta\mu|x|$ ii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu|x|$ iii) $f(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$ iv) $f(x) = |\epsilon\phi x|$

24. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu(\pi - 2x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3\eta\mu 2x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- β) Να βρείτε την περίοδο, το μέγιστο και το ελάχιστο της f .
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση G_f της f .
- δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει λύση.

25. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \eta\mu(x - \pi) + 1}{3 + \eta\mu(x + \pi) + \sigma\upsilon\nu(x - \pi)}$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
- γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $T = 2\pi$ είναι περίοδος της f .

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3x$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της $f(x)$.
- β) Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της $f(x)$.
- γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$.
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = 2(\sigma\upsilon\nu 3x - 1)$.

27. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x) + f(x + 1) + f(x + 2) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι:

- α) $f(x + 3) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β) Η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 3$.
- γ) Ο αριθμός $T = 6$ είναι επίσης περίοδος της $f(x)$.

28. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(20\pi - x) + 2}{\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \eta\mu(5\pi - x) + 4}$.

- α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- γ) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π .
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \sin \frac{2x}{3} + \beta$, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ η οποία έχει μέγιστο το 3 και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 1.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 1$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ)) Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2 + \left(f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)-1\right)^2 = 4$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(6x) = f(3x)$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

askisopolis