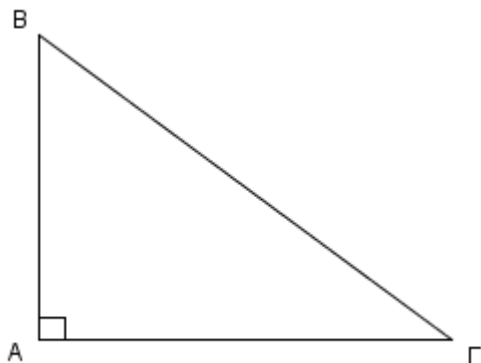


3.1

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας



$$\eta\mu B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AG}{BG}$$

$$\eta\mu \Gamma = \frac{AB}{BG}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{BG}$$

$$\sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{AG}{BG}$$

$$\epsilon\phi B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}} = \frac{AG}{AB}$$

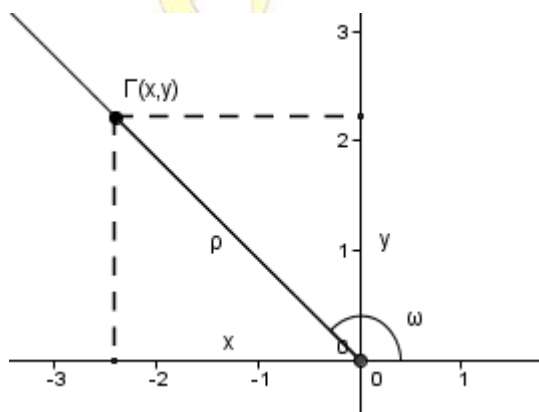
$$\epsilon\phi \Gamma = \frac{AB}{AG}$$

$$\sigma\phi B = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{AB}{AG}$$

$$\sigma\phi \Gamma = \frac{AG}{AB}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω , με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο και $O\Gamma$ μία ημιευθεία αυτού. Αν ω είναι η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox όταν περιστραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το O μέχρι να συμπίψει για πρώτη φορά με την ημιευθεία $O\Gamma$ τότε ο θετικός ημιάξονας Ox λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας ω , ενώ η ημιευθεία $O\Gamma$ λέγεται **τελική πλευρά** της ω .



$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \quad (\text{με την προϋπόθεση ότι } x \neq 0)$$

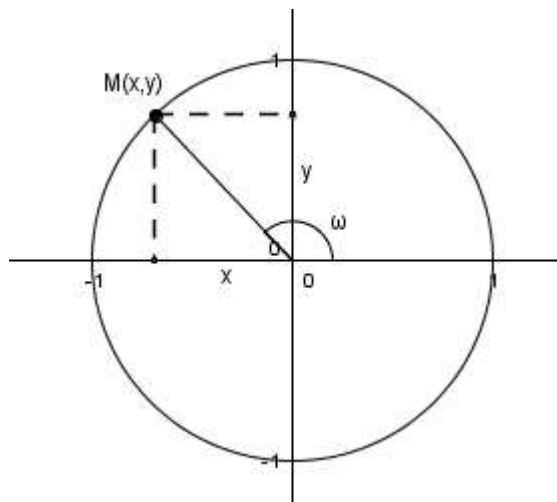
$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \quad (\text{με την προϋπόθεση ότι } y \neq 0)$$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου

Γ (διαφορετικού του O) της τελικής πλευράς της γωνίας ω και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ η απόσταση του Γ από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Τριγωνομετρικός κύκλος

Τριγωνομετρικός κύκλος λέγεται ο κύκλος με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα $\rho=1$.



Γενικότερα, αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τότε ισχύει:

$$\begin{aligned}\eta\mu\omega &= y = \text{τεταγμένη του σημείου } M \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= x = \text{τετμημένη του σημείου } M\end{aligned}$$

Για το λόγο αυτό ο άξονας yy' λέγεται και άξονας των ημιτόνων, ενώ ο άξονας xx' λέγεται και άξονας των συνημιτόνων.

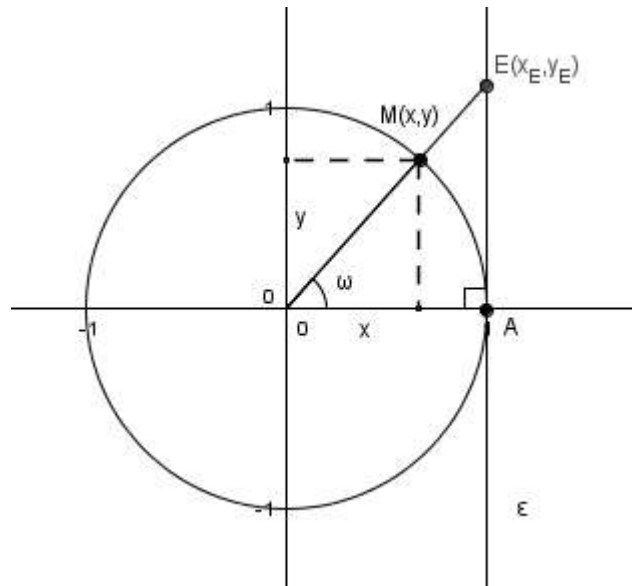
Παρατηρήσεις : α) Οι τιμές του $\sigma\upsilon\nu\omega$ και του $\eta\mu\omega$ μιας γωνίας ω δεν μπορούν να υπερβούν κατά απόλυτη τιμή την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, που είναι ίση με 1. Δηλαδή: $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$

β) Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω , ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας.

	1°	2°	3°	4°
$\eta\mu\omega$	+	+	-	-
$\sigma\upsilon\nu\omega$	+	-	-	+
$\epsilon\phi\omega$	+	-	+	-
$\sigma\phi\omega$	+	-	+	-

Ο άξονας των εφαπτομένων

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μια γωνία ω που η τελική της πλευρά τον τέμνει στο σημείο $M(x, y)$. Φέρνουμε την εφαπτομένη ϵ του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο A . Αν η τελική πλευρά της γωνίας τέμνει την ευθεία ϵ στο σημείο E τότε ισχύει:



$\epsilon \sin \omega = y_E = \text{τεταγμένη του σημείου } E$

Για το λόγο αυτό η ευθεία ϵ , που έχει εξίσωση $x = 1$, λέγεται **άξονας των εφαπτομένων**.

Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Το **ακτίνιο** (*rad*) είναι μονάδα μέτρησης γωνίας. Ένα ακτίνιο (1 rad) είναι η επίπεδη γωνία η οποία όταν γίνει επίκεντρη ορίζει τόξο, σε οποιοδήποτε κύκλο, με μήκος ίσο με την ακτίνα του.

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει και η σχέση μοίρας και ακτινίου ως μονάδων μέτρησης γωνιών, ως εξής :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Όπου α είναι τα ακτίνια της γωνίας και μ οι μοίρες της γωνίας.

Για παράδειγμα:

- για να προσδιορίσουμε τα ακτίνια της γωνίας 45° εργαζόμαστε με βάση τον προηγούμενο τύπο ως

εξής:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{45}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 45\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{45\pi}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

- για να προσδιορίσουμε τις μοίρες της γωνίας $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$, εργαζόμαστε ως εξής:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow 180 \frac{\pi}{6} = \pi \cdot \mu \Leftrightarrow 30\pi = \pi \cdot \mu \Leftrightarrow \mu = 30^\circ$$

Τριγωνομετρικός πίνακας

ω	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\epsilon\phi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0		0
$\sigma\phi\omega$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μετατρέψετε σε ακτίνια τις γωνίες:

α) 0° , β) 15° , γ) 30° , δ) 45° , ε) 50° , στ) 60° , ζ) 90° , η) 100° , θ) 120° , ι) 135° ,
ια) 150° , ιβ) 180° , ιγ) 210° , ιδ) 225° , ιε) 240° , ιστ) 300° , ιζ) 320° , ιη) 360°

2. Να μετατρέψετε σε ακτίνια τις γωνίες:

α) 540° , β) 1800° , γ) -30° , δ) -450° , ε) 720° , στ) -3600° , ζ) -90° , η) 900°

3. Να μετατρέψετε σε μοίρες τις γωνίες:

α) 0 rad , β) $\frac{\pi}{12} \text{ rad}$, γ) $\frac{\pi}{8} \text{ rad}$, δ) $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$, ε) $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$, στ) $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$, ζ) $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$, η) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$

4. Να μετατρέψετε σε μοίρες τις γωνίες:

α) $4\pi \text{ rad}$, β) $-\frac{\pi}{12} \text{ rad}$, γ) $\frac{15\pi}{8} \text{ rad}$, δ) $-\frac{15\pi}{6} \text{ rad}$, ε) $\frac{9\pi}{4} \text{ rad}$, στ) $\frac{9\pi}{2} \text{ rad}$, ζ) $-\frac{22\pi}{5} \text{ rad}$

5. Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών:

α) $\frac{5\pi}{2}$, β) $-\frac{25\pi}{4}$, γ) $\frac{101\pi}{5}$, δ) $\frac{607\pi}{6}$.

6. Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών:

α) 2013° , β) -1926° , γ) 6200° , δ) -810° .

7. Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ και $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$ να προσδιορίσετε τα πρόσημα των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\beta$, β) $B = \eta\mu(2\alpha + \beta)$, γ) $\Gamma = \eta\mu(-4\alpha + \beta)$, δ) $\Delta = \sigma\upsilon\nu(\alpha + 6\beta)$

8. Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ και $-\frac{\pi}{3} < \beta < 0$ να προσδιορίσετε τα πρόσημα των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu \frac{3}{2}\beta$, β) $B = \eta\mu(2\alpha - \beta)$, γ) $\Gamma = \eta\mu(4\alpha + \beta)$, δ) $\Delta = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$

9. Αν $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ να προσδιορίσετε το πρόσημο της παράστασης $A = \eta\mu 2\alpha + \epsilon\varphi(\alpha - \frac{\pi}{6}) - \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\varphi(-3\pi)$

10. Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ να προσδιορίσετε το πρόσημο της παράστασης $A = \eta\mu 4\alpha - \sigma\varphi(\alpha - \frac{\pi}{4}) - \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha)$.

11. Αν $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ να προσδιορίσετε το πρόσημο των παραστάσεων:

α) $A = \sigma\varphi\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega$, β) $B = \frac{\eta\mu\omega - \sigma\varphi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \epsilon\varphi\omega}$

12. Αν $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ να δείξετε ότι: $\eta\mu^5(\omega + \frac{\pi}{2}) + 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^3\omega + \eta\mu 2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega - \frac{\pi}{2}) < 0$

13. Αν $\eta\mu\omega \cdot \sigma\varphi\omega < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\varphi\omega > 0$, να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας ω .

14. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\eta\mu^2 \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4} - 2\eta\mu \frac{\pi}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$

β) $\epsilon\varphi \frac{\pi}{6} \sigma\varphi \frac{3\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + \eta\mu^3 \pi$

γ) $\sigma\varphi^4 \frac{\pi}{4} - \epsilon\varphi^6 \pi + \eta\mu^2 \frac{3\pi}{2} - \epsilon\varphi 2\pi$

15. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{8\sigma\upsilon\nu^3 \frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{6}}{\eta\mu^2 \frac{\pi}{3} + \eta\mu^2 \frac{\pi}{4} + \eta\mu^2 \frac{\pi}{6}}$.

16. Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης: $\eta\mu 750^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu(-330^\circ) - \eta\mu 1110^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 390^\circ$.

17. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $2\eta\mu \frac{3\pi}{2} - 4(2\sigma\upsilon\nu 3\pi - 2\eta\mu 7\pi) + \frac{3 - \sigma\varphi \frac{\pi}{2}}{1 + \epsilon\varphi \pi}$, β) $\sigma\varphi \frac{9\pi}{4} + \epsilon\varphi 3\pi + \frac{2\sigma\varphi \frac{\pi}{2}}{\sigma\upsilon\nu(-\pi)}$

18. Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 1020^\circ \cdot \eta\mu(-330^\circ) + \eta\mu 1140^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 1110^\circ = 1$

19. Για ποιες τιμές του x έχουν νόημα οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί:

α) $\sigma\upsilon\nu\theta = x - 5$

β) $\eta\mu\theta = x^2 - 4x + 4$

γ) $\eta\mu(\theta - \pi) = |x - 1| - 1$

δ) $\sigma\upsilon\nu 2\theta = \frac{2 - x}{x - 4}$

20. Να προσδιορίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α) $A=2+\sin 5x$, β) $B=6-\eta\mu x$, γ) $\Gamma=3-\eta\mu^2 2x$, δ) $\Delta=\frac{2}{5+\sin x}$, ε) $E=\frac{12}{5-\eta\mu x}$

21. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει $\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{8}}{2}$.

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(1+2\sin\theta)x+\sin\theta=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές κι άνισες, για κάθε γωνία θ .

β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

i. $-1 \leq x_1+x_2 \leq 3$

ii. $-1 \leq x_1 \cdot x_2 \leq 1$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ

1. Η γωνία $\omega=\frac{5\pi}{4}$ και η γωνία $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$ έχουν την ίδια τελική πλευρά. Σωστό ☐ Λάθος ☐
2. Αν $\omega<0$ τότε $\epsilon\varphi\omega<0$. Σωστό ☐ Λάθος ☐
3. Αν $\eta\mu\omega<0$ και $\sin\omega>0$ τότε $\sigma\varphi\omega>0$. Σωστό ☐ Λάθος ☐
4. Για κάθε γωνία ω ισχύει $|\eta\mu\omega|<1$. Σωστό ☐ Λάθος ☐
5. Για κάθε γωνία ω ισχύει $|\eta\mu\omega|\leq 1$. Σωστό ☐ Λάθος ☐
6. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει $|\eta\mu\omega|\geq 1$. Σωστό ☐ Λάθος ☐

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Η γωνία $\theta=150^\circ$, σε ακτίνια είναι
Α. $\frac{6\pi}{5}$ Β. $\frac{5\pi}{6}$ Γ. $\frac{\pi}{6}$ Δ. $\frac{3\pi}{4}$ Ε. $\frac{4\pi}{3}$
2. Αν $\eta\mu\omega=\frac{x-1}{x}$, με $x\neq 0$, τότε
Α. $x<\frac{1}{2}$ Β. $0<x<\frac{1}{2}$ Γ. $x<0$ Δ. $x>\frac{1}{2}$ Ε. $x<0$ ή $x>\frac{1}{2}$
3. Η μέγιστη τιμή της παράστασης $A=2\eta\mu(3\omega-1)$ είναι:
Α. 4 Β. 5 Γ. 1 Δ. 2 Ε. 0