

3.4

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Περιοδική συνάρτηση

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

- $x+T \in A, x-T \in A$
- $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Μελέτη της $f(x)=\eta\mu x$

Πεδίο ορισμού: $A=\mathbb{R}$

Σύνολο τιμών: $f(A)=[-1, 1]$

Περίοδος: $T=2\pi$

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$

Μονοτονία: Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Ακρότατα: Μέγιστο το $f(\frac{\pi}{2})=1$ και ελάχιστο το $f(\frac{3\pi}{2})=-1$

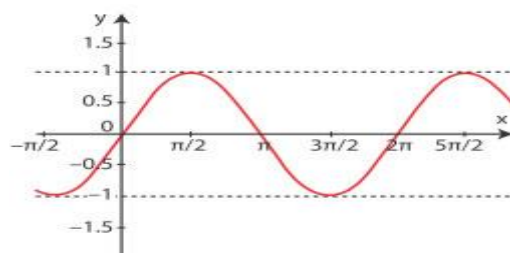
Σημεία τομής με τους άξονες: Η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$

Συμμετρίες: Η f είναι περιττή διότι για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x=-f(x)$$

Γραφική παράσταση:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
		μεγ.		ελαχ.	



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο, λέγεται **ημιτονοειδής καμπύλη**.

Μελέτη της $f(x)=\sin x$

Πεδίο ορισμού: $A=\mathbb{R}$

Σύνολο τιμών: $f(A)=[-1, 1]$

Περίοδος: $T=2\pi$

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$

Μονοτονία: Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$

Ακρότατα: Μέγιστο το $f(0)=1$ και $f(2\pi)=1$ ενώ έχει ελάχιστο το $f(\pi)=-1$

Σημεία τομής με τους άξονες: Η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$

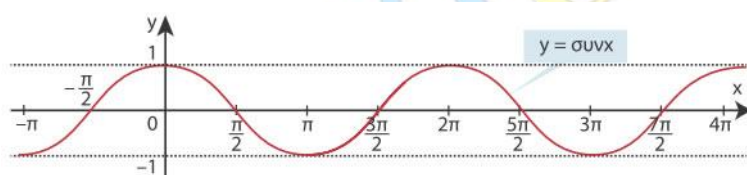
Συμμετρίες: Η f είναι άρτια διότι για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$$

$$-x \in A \text{ και } f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$$

Γραφική παράσταση:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	1 μεγ.	0	-1 ελαχ.	0	1 μεγ.



Μελέτη της $f(x)=\cos x$

Πεδίο ορισμού: $A=\{x \in \mathbb{R} / \sin x \neq 0\}$

Σύνολο τιμών: $f(A)=\mathbb{R}$

Περίοδος: $T=\pi$

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Μονοτονία: Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Ακρότατα: Δεν παρουσιάζει ακρότατα

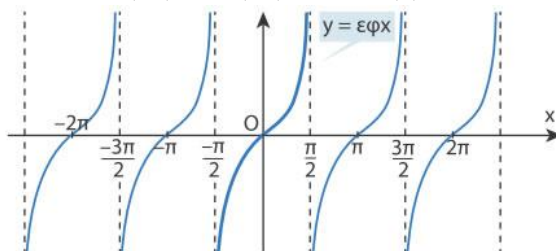
Σημεία τομής με τους άξονες: Η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες στο σημείο $(0, 0)$.

Συμμετρίες: Η f είναι περιττή διότι για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$$

$$-x \in A \text{ και } f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$$

Γραφική παράσταση:



Όταν ο x «τείνει» στο $-\frac{\pi}{2}$ από μεγαλύτερες τιμές η $\epsilon\phi x$ «τείνει» στο $-\infty$.

Γι' αυτό λέμε ότι η ευθεία $x = -\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της

γραφικής παράστασης της f . Επίσης όταν ο x «τείνει» στο $\frac{\pi}{2}$ από

μικρότερες τιμές η $\epsilon\phi x$ τείνει στο $+\infty$. Γι' αυτό λέμε ότι και η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$

είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

Παρατηρήσεις : α) Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο

2π ενώ οι συναρτήσεις $f(x)=\epsilon\phi x$ και $g(x)=\sigma\phi x$ είναι περιοδικές με περίοδο π

β) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu\omega x\pm\kappa$ ή $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x\pm\kappa$ ($\omega>0$) είναι περιοδική με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

γ) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\epsilon\phi\omega x$ ή $f(x)=\rho\sigma\phi\omega x$ ($\omega>0$) είναι περιοδική

με περίοδο $T=\frac{\pi}{\omega}$.

δ) Μια συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu\omega x\pm\kappa$ ή $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x\pm\kappa$ ($\omega>0$), έχει ελάχιστη τιμή το $-|\rho|\pm\kappa$ και μέγιστη τιμή το $|\rho|\pm\kappa$.

ε) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu\omega x$ ή $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x$ τη μελετάμε στο διάστημα $[0, T]$.

στ) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\epsilon\phi\omega x$ τη μελετάμε στο διάστημα $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

ζ) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\sigma\phi\omega x$ τη μελετάμε στο διάστημα $(0, T)$.

η) Αν πρέπει να μελετήσουμε τη συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x\pm\kappa)$ ή $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x\pm\kappa)$, τη μελετάμε στο διάστημα $[\mp\kappa, T\mp\kappa]$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

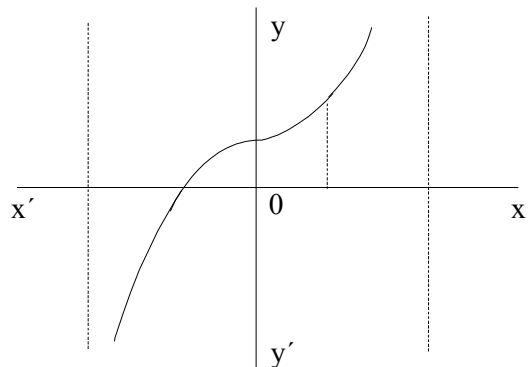
1

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\epsilon\phi 2x+1$.

Λύση

Περίοδος: $T=\frac{\pi}{2}$. Άρα θα τη σχεδιάσουμε στο $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$2x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\epsilon\phi 2x$	—	—1	0	1	—
$\epsilon\phi 2x+1$	—	0	1	2	—



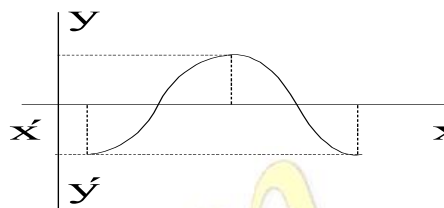
2

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Λύση

Περίοδος: $T=2\pi$. Άρα θα τη σχεδιάσουμε στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$ (διότι είναι στη μορφή $f(x)=\rho\sin(\omega x \pm \kappa)$).

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{6}$
$x - \frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	1	0	-1	0	1
$-\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	-1	0	1	0	-1



3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sin\frac{x}{3} - 3$. Να βρείτε: α) το μέγιστο και το ελάχιστό της, β) την περίοδο της

Λύση

α) Μέγιστο: $|3| - 3 = 3 - 3 = 0$. Ελάχιστο: $-|3| - 3 = -3 - 3 = -6$

β) Περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = \frac{6\pi}{1} = 6\pi$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = 2\eta\mu x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x$, β) $g(x) = 4\epsilon\phi 4x + 8\sigma\phi 8x$, γ) $h(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x \cdot \sigma\phi \frac{x}{2}$.

2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές:

α) $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\phi^3 x}{\sigma\upsilon\nu x + 10}$, β) $g(x) = 3\eta\mu^4 x - 6\sigma\upsilon\nu x + 11$

3. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων $f(x) = -2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ και $g(x) = 4\eta\mu x - 3$.

4. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή (εφόσον υπάρχουν) καθώς και την περίοδο των παρακάτω συναρτήσεων:
- α) $f(x)=3\sigma\upsilon\nu\frac{2x}{5}$, β) $g(x)=6\eta\mu(-\frac{x}{2})$, γ) $h(x)=-4\epsilon\phi(-\frac{2x}{3})$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{2}+3\eta\mu\frac{2x}{3}$. Να βρεθούν: α) η περίοδός της, β) το μέγιστο και το ελάχιστό της
6. Αν η συνάρτηση $g(x)=\epsilon\phi\left(\frac{3\beta}{4}x\right)$, $\beta\in\mathbb{R}$ έχει περίοδο π , να βρείτε το β .
7. Αν η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{\beta x}{2}$, $\alpha, \beta>0$ έχει περίοδο 4π και μέγιστη τιμή 2, να βρείτε τα α, β .
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\eta\mu\frac{\beta x}{3}+\gamma$ με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$. Αν η f έχει περίοδο $T=2\pi$, μέγιστη τιμή το 3 και τέμνει τον yy' στο σημείο με τεταγμένη 2, να βρείτε τον τύπο της f .
9. Αν η συνάρτηση $f(x)=2\alpha\sigma\upsilon\nu^2x$ διέρχεται από το σημείο $(\pi, 2)$ τότε:
- α) να προσδιορίσετε το α
 β) να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης
 γ) να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{\alpha}{2}\epsilon\phi^4(2x)$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-\frac{\pi}{8}, 1)$.
- α) Να προσδιορίσετε την τιμή του αριθμού α .
 β) Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης (αν υπάρχουν).
 γ) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
11. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις:
- α) $f(x)=\sigma\upsilon\nu 2x+\epsilon\phi x$
 β) $g(x)=\eta\mu 2x-\eta\mu 4x$
 γ) $h(x)=3\eta\mu 6x+4\sigma\upsilon\nu 8x$
 έχουν περίοδο $T=\pi$.
12. Βρείτε τη μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=2\eta\mu(3x-\frac{\pi}{4})-3\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{4}-x)$.
 (Υπόδειξη : Να φέρετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x+\alpha)$ ή $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x+\alpha)$)
13. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
- $f(x)=1+\sigma\phi\frac{x}{2}$ και $g(x)=-1+\sigma\phi\frac{x}{2}$
14. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $f(x)=2\sigma\phi x-3$.
15. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις: $f(x)=\eta\mu 2x$ και $g(x)=\eta\mu^2 2x$.

- 16.** Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\kappa+\lambda\cdot\text{syn}\frac{2x}{3}$ ($\lambda<0$) αν είναι γνωστό ότι έχει μέγιστο το 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(\pi, \frac{7}{2})$.
- 17.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=2+|\eta\mu 3x|$.
- 18.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-3\text{syn}(x+\frac{\pi}{2})$.
- 19.** Η θερμοκρασία ενός άγνωστου πλανήτη t ώρες μετά τα μεσάνυχτα δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τη σχέση: $\theta(t)=\kappa\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{12}\right)$ σε $^{\circ}\text{C}$, $t\in[0, 24]$ όπου κ σταθερά. Ένα διαστημόπλοιο με αστροναύτες φτάνει στον πλανήτη.
- α) Βρείτε τον αριθμό κ αν στις 8 το πρωί η θερμοκρασία είναι $\frac{10\sqrt{3}}{2}^{\circ}\text{C}$.
- β) Να γίνει η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας συναρτήσει του χρόνου.
- 20.** Το βάθος του νερού κάτω από τη γέφυρα του Ευρίπου κατά τη διάρκεια της ημέρας δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=20+4\text{syn}\frac{2\pi t}{3}$ όπου t ο χρόνος σε ώρες με $0\leq t\leq 24$.
- α) Να βρεθεί η περίοδος της παραπάνω συνάρτησης.
- β) Ποιο είναι το μέγιστο και ποιο το ελάχιστο βάθος του νερού;
- γ) Ποιες ώρες της ημέρας το βάθος του νερού είναι 20m;
- δ) Αν το ύψος της γέφυρας είναι 30m (από το πυθμένα του νερού) να ελεγχθεί αν ένα σκάφος ύψους 8m (πάνω από την επιφάνεια του νερού) μπορεί να περάσει κάτω από τη γέφυρα στις 12 το πρωί.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

- Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu 3x$, $g(x)=3\text{syn}x$, $h(x)=1-\epsilon\phi x$, $t(x)=\sigma\phi(x-\pi)$ είναι περιοδικές; Αν ναι, ποια είναι η περίοδος της κάθε μιας;
- Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A , ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός $T>0$, ώστε να είναι περίοδος της f ;
- Τι σημαίνει ότι μια συνάρτηση είναι περιοδική;
- Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu^3x$ και $g(x)=\text{syn}^44x$;
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\text{syn}x$, έχει άξονα συμμετρίας;
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\epsilon\phi x+\sigma\phi x$ έχει περίοδο π . (Θεωρούμε ότι $\eta\mu x\cdot\text{syn}x\neq 0$)

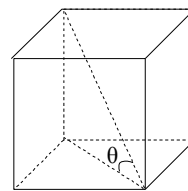
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ

1. Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ τότε $\sin x = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x}$ Σωστό ☐ Λάθος ☐
2. Η $f(x) = 3\epsilon\phi(-x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ Σωστό ☐ Λάθος ☐
3. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu(2001x)$ βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $y=1$ και $y=-1$. Σωστό ☐ Λάθος ☐
4. Η $f(x) = \sigma\phi\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$. Σωστό ☐ Λάθος ☐
5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\sin x \neq 0$ ισχύει $\epsilon\phi(x+\pi) = \epsilon\phi(x-\pi) = \epsilon\phi x$. Σωστό ☐ Λάθος ☐
6. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi^2 x$ είναι περιττή. Σωστό ☐ Λάθος ☐
7. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x^3$ είναι άρτια. Σωστό ☐ Λάθος ☐

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu(-2x)$ παρουσιάζει ελάχιστο το
Α. -1 Β. 0 Γ. 1 Δ. -3 Ε. 3
2. Η συνάρτηση $f(x) = \sin\left(-\frac{x}{3}\right)$ παρουσιάζει ελάχιστο για
Α. π Β. 2π Γ. $\frac{\pi}{2}$ Δ. 3π Ε. 4π
3. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ έχει
Α. κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$ Β. άξονα συμμετρίας τον xx'
Γ. άξονα συμμετρίας τον yy' Δ. κανένα από τα προηγούμενα
4. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία
Α. $x = \frac{\pi}{2}$ Β. $x = 0$ Γ. $x = -\frac{\pi}{2}$ Δ. καμία από τις προηγούμενες
5. Για τη συνάρτηση $f(x) = 3\sin 2x - 2$ ισχύει:
Α. $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$ Β. $f(x + \pi) = f(x - \pi)$ Γ. $f(x - \frac{2\pi}{3}) = f(x)$ Δ. $f(x - \frac{3\pi}{2}) = f(x + \frac{3\pi}{2})$
6. Η συναρτήσεις $f(x) = \epsilon\phi x$, $g(x) = \sigma\phi x$ έχουν
Α. ίδιο μέγιστο Β. ίδιο ελάχιστο Γ. ίδιο πεδίο ορισμού Δ. ίδια περίοδο
7. Η συνάρτηση $f(x) = -2\eta\mu x + 2$ έχει:
Α. μέγιστο το 2 και ελάχιστο το -2 Β. μέγιστο το 4 και ελάχιστο το -2
Γ. μέγιστο το 0 και ελάχιστο το -4 Δ. μέγιστο το 4 και ελάχιστο το 0

8. Ημιτονοειδής καμπύλη είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης
 Α. $f(x)=\epsilon\phi x$ Β. $f(x)=\sigma\phi x$ Γ. $f(x)=\sigma\upsilon\eta x$ Δ. καμία από τις προηγούμενες
9. Η συνάρτηση $f(x)=5\cdot\eta\mu\frac{x}{8}$ έχει περίοδο
 Α. $\frac{\pi}{8}$ Β. $\frac{\pi}{4}$ Γ. π Δ. 2π Ε. 16π
10. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\phi(x-\frac{\pi}{4})$ έχει περίοδο:
 Α. $\frac{\pi}{4}$ Β. $-\frac{\pi}{4}$ Γ. π Δ. 2π
11. Η συνάρτηση $f(x)=5\sigma\upsilon\eta\left(\pi-2x-\frac{\pi+2x}{2}\right)+\frac{1}{4}$ έχει περίοδο ίση με
 Α. $\frac{3}{2\pi}$ Β. $\frac{2\pi}{3}$ Γ. $\frac{1}{\pi}$ Δ. $\frac{2}{\pi}$
12. Η συνάρτηση $f(x)=5\eta\mu x-12$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα:
 Α. $[0, \pi]$ Β. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ Γ. $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ Δ. $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
13. Η συνάρτηση $f(x)=1-\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\eta^2 x$
 Α. έχει μέγιστο το 1 Β. έχει ελάχιστο το -1 Γ. είναι σταθερή
14. Στον διπλανό κύβο ακμής 1, ισχύει:
 Α. $\sigma\upsilon\eta\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Β. $\eta\mu\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Γ. $\epsilon\phi\theta=\sqrt{2}$ Δ. $\sigma\phi\theta=\sqrt{3}$ Ε. κανένα από τα προηγούμενα



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

1. Η $f(x)=2\sigma\upsilon\eta\frac{x-\pi}{3}$ είναι περιοδική με περίοδο $T=$ _____.
2. Η $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\eta x}{\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\eta^4 x + 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\eta^2 x}$ είναι περιοδική με περίοδο $T=$ _____.
3. Οι ασύμπτωτες της $f(x)=\epsilon\phi x$ είναι οι ευθείες $x=$ _____, $\kappa\in\mathbb{Z}$.
4. Η περίοδος της $f(x)=|\eta\mu x|$ είναι $T=$ _____.
5. Η μέγιστη τιμή της $f(x)=-\sqrt{2}\sigma\upsilon\eta\pi x$ είναι _____.
6. Αν $3\pi<\alpha<\beta<4\pi$ τότε $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$ _____ $\eta\mu\frac{\beta}{2}$.
7. Αν $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ τότε $\sigma\upsilon\eta\frac{\alpha}{2}$ _____ $\sigma\upsilon\eta\frac{\beta}{2}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις της στήλης Α με τις περιόδους τους στη στήλη Β.

Στήλη Α

i. $f(x) = \eta\mu \frac{3x}{2}$

ii. $g(x) = \sigma\upsilon\nu \frac{2x}{3}$

iii. $h(x) = \epsilon\varphi \frac{x}{2} - 1$

iv. $t(x) = \sigma\varphi 2x - 5$

Στήλη Β

α. $T = \frac{4\pi}{3}$

β. $T = 2\pi$

γ. $T = 3\pi$

δ. $T = 5\pi$

ε. $T = \frac{2\pi}{5}$

στ. $T = \frac{\pi}{2}$

2. Σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α να αντιστοιχήσετε την ελάχιστη τιμή της στη στήλη Β.

Στήλη Α

i. $f(x) = -3\eta\mu \sqrt{3} x$

ii. $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{2x}{3}$

iii. $h(x) = \sqrt{3} \eta\mu \frac{x}{3\pi}$

iv. $t(x) = \frac{2}{3} \eta\mu \left(-\frac{3}{2} x \right)$

Στήλη Β

α. -3

β. $-\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$

γ. -2

δ. $-\sqrt{3}$

ε. $-\frac{3}{2}$

στ. $-\frac{2}{3}$

Βιβλιογραφία

1. Algebra and Trigonometry, James Stewart, Lothar Redlin and Saleem Watson
2. Trigonometry, Margaret Lial, John Hornsby, David I. Schneider and Callie Daniels
3. Άλγεβρα Β' Λυκείου, Π. Κανδύλας
4. Άλγεβρα Β' Λυκείου, Χ. Στεργίου, Χ. Νάκης, Ι. Στεργίου
5. Άλγεβρα Β' Λυκείου, Α. Μπάρλας
6. Let's Review Algebra 2/Trigonometry, Bruce Waldner
7. Student Solutions Manual for College Algebra and Trigonometry: A Unit Circle Approach, Mark Dugopolski
8. Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Β' Λυκείου
9. Μεθοδική Άλγεβρα Β' Λυκείου, Χ. Στεργίου, Χ. Νάκης, Ι. Στεργίου

άσκηση