ΘΕΜΑ 4 – 22734

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό Ε = 30 cm^2 του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y=\frac{60}{x}$ και $(x+1)^2=x^2+y^2$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3+x^2-3600=0$.

(Μονάδες 4)

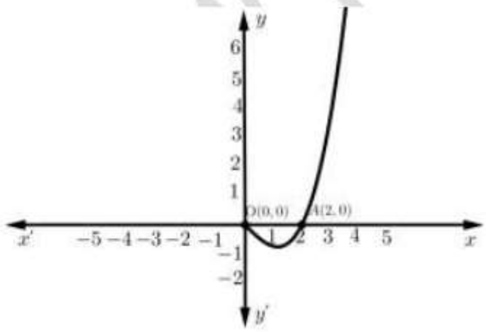
γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 12)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 – 22759

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης



$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\gamma x+\delta$, $x\in R$ και γ, δ πραγματικές σταθερές.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι γ = – 1 και δ = 0.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$, $x\in R$:

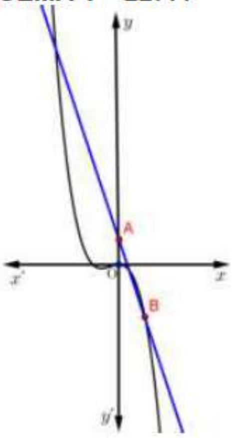
i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in R$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για x < 0. (Μονάδες 5)

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1)=-\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=-\frac{3}{4}$ και $f(x)=\frac{3}{4}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22777



Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α (0, 1) και Β (1,– 2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.
(Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$.
(Μονάδες 9)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ
ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 22766

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)x^3 + (\kappa - 1)x^2 - 3\kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in R$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο P(x) είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x – 1 είναι ίσο με – 4.
(Μονάδες 7)

β) Για κ = 1 και λ = – 2

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x – 1.
(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 4 = x^2 - 1$. (Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} \geq 1$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 – 22769

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ με $\alpha, \beta \in R$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x – 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x + 1 είναι ίσο με – 6 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$. (Μονάδες 7)

β) Αν α = – 5 και β = 1, να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 . (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot \sigma\upsilon\nu^3(3\omega) + 5 \cdot \eta\mu^2(2\omega) + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22772

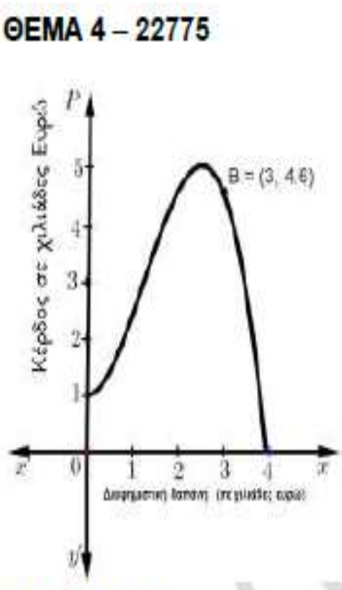
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in R$, όταν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x + 2 . (Μονάδες 7)

β) Για κ = – 7 και λ = 6 να λυθεί η εξίσωση P(x) = 0 . (Μονάδες 9)

γ) Για κ = – 7 και λ = 6 να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5} \geq 0$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 – 22775



Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν: $P(x) = -0.5x^3 + 1.9x^2 + 1,\ 0 \le x \le 4$ όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.

α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος.

(Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i.

(Μονάδες 10)

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ;

(Μονάδες 10)

Β. Προβλήματα κίνησης και εφαρμογής στη Γεωμετρία

4.3 Πρόβλημα Απομάκρυνσης

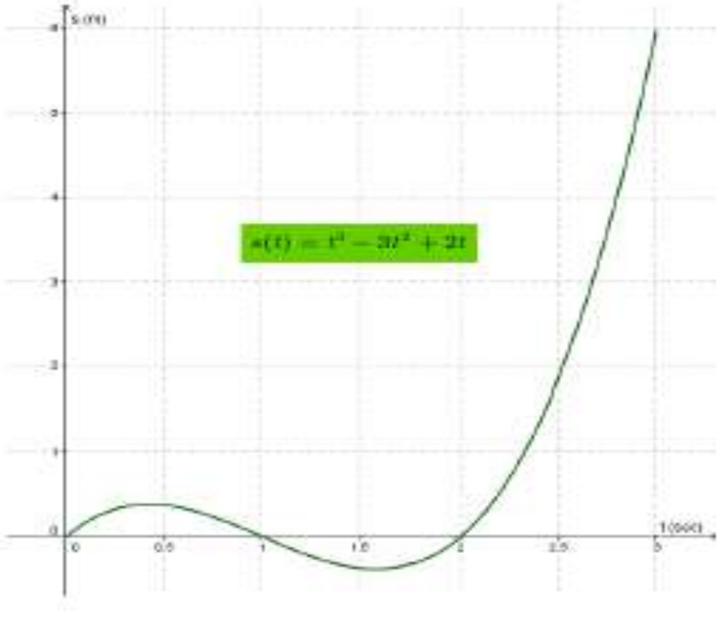
Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και η απομάκρυνση του από το αρχικό σημείο εκκίνησης δίνεται από την συνάρτηση $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t,\ t \geq 0$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και s σε μέτρα

α) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το σώμα διέρχεται από το αρχικό σημείο

β) Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα στα οποία η απομάκρυνση είναι θετική και τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα στα οποία είναι αρνητική

γ) Να υπολογίσετε το διάστημα το οποίο θα διανύσει το σώμα μεταξύ του δεύτερου και του τρίτου δευτερολέπτου της κίνησης

δ) Να ερμηνεύσετε τα συμπεράσματα σας με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $s(t)$



4.4 Πρόβλημα Διαστήματος

Το διάστημα $S(t)$ σε m που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε sec, δίνεται από τον τύπο:

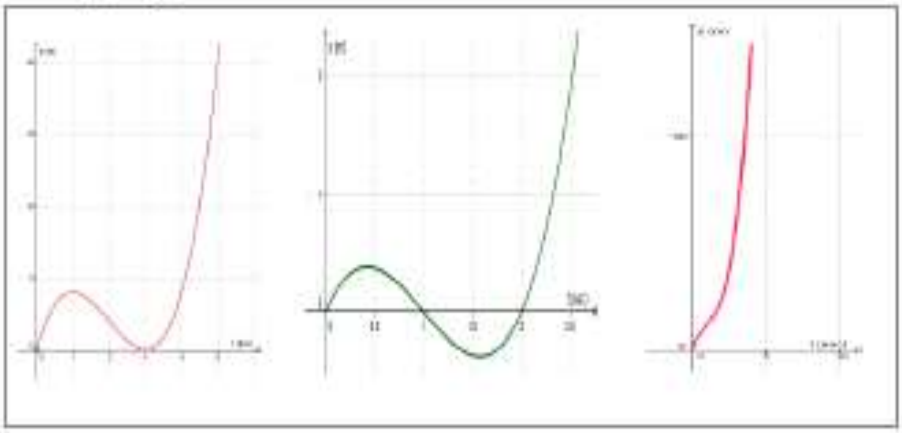
$$S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30m

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Μπορείτε να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό;

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία μόνο από αυτές μπορεί να εκφράσει διάστημα. Μπορείτε να την βρείτε, δικαιολογώντας την απάντησή σας;



ε) Θεωρούμε δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2, με $t_1 < t_2$.

Να αποδείξετε ότι $S(t_1) < S(t_2)$

4.5 Η Δεξαμενή

Θέλουμε να κατασκευάσουμε μία δεξαμενή χωρητικότητας 48 m^3 από λαμαρίνα, η οποία έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις 10 x 8 (σε m). Για να γίνει η κατασκευή, κόβουμε από κάθε γωνία της λαμαρίνας ίσα τετράγωνα και τα γυρίζουμε έτσι ώστε να δημιουργήσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

α) Να βρεθεί το μήκος της πλευράς του κάθε τετραγώνου που αποκόπτεται
β) Αν θέλουμε να βάψουμε τη δεξαμενή, με κόστος 5 ευρώ/m^2, να βρείτε την επιλογή που πρέπει να κάνουμε, αν θέλουμε να έχουμε το μικρότερο δυνατό κόστος, το οποίο να βρεθεί